

FDI Robusta Para Sistemas LPV Mediante PIO

Ríos A.*

*Universidad de Los Andes, Facultad de Ingeniería, Mérida, Venezuela

e-mail: ilich@ula.ve

Resumen: Considerando los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) continuos con incertidumbres politópicas, esta contribución presenta un método para la síntesis de filtros robustos de detección y diagnóstico de fallas. Tomando ventaja de los reconstructores de entradas desconocidas, los filtros se diseñan como observadores proporcional-integral (PIO), considerando y resolviendo un problema de control por realimentación estática de la salida (SOF), donde la ganancia de realimentación corresponde a las matrices de diseño del PIO. El método está basado en condiciones de desempeño modificadas, establecidas a partir de las normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, las cuales se describen como desigualdades matriciales lineales, LMIs. La generación de los residuos, producto de los filtros robustos, se obtiene aplicando esas condiciones modificadas sobre los sistemas con perturbación desconocidas y sujetos a incertidumbres paramétricas. Los parámetros inciertos se suponen que pertenecen a un politopo. Las condiciones de desempeño $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ extendidas se obtienen por medio del lema de proyección. El diagnóstico de las fallas se alcanza en primer lugar, estableciendo condiciones, extendidas también, de detectabilidad y separabilidad. En segundo lugar, si esas condiciones se satisfacen, diseñando un banco de filtros, es decir, por multifiltraje, basado en PIOs. Para cada falla objeto de separación, se diseña un filtro. Para ilustrar los resultados y el desempeño del multifiltraje, se presenta además, un ejemplo numérico.

Palabras claves: Diagnóstico de Fallas, Control Robusto, Normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, Desigualdades Matriciales Lineales (LMI), Observadores Proporcional-Integral (PIO).

Abstract: This paper presents a novel approach for robust fault detection and isolation (FDI), based on modified $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ performance conditions, which are described as LMIs. The FDI filters are designed as Proportional-Integral Observers (PIO), by considering and solution of Static Feedback Output (SOF) control problem, where the feedback gain contains the matrices of the PIO. The generation of the residues, as consequence of the outputs of the robust filters, is obtained applying these conditions modified on linear systems with unknown disturbance and parametric uncertainties. The uncertainty parameters are supposed to belong to a polytope. The extended $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ conditions are obtained by means of the well known projection lemma. Fault diagnosis is obtained, first of all, establishing extended conditions of detectability and separability. Secondly, if these conditions are satisfied, designing a bank of filters based on PIO, which is known as multifiltering. For each fault separation object, a filter is designed. Performance of the proposed synthesis technique is illustrated by numerical example.

Keywords: Fault Diagnosis, Robust Control, $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Norms, Linear Matrix Inequalities (LMI), Proportional-Integral Observers (PIO).

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, los sistemas de detección y diagnóstico de fallas (FDI) han sido un campo de investigación muy activo. Este hecho es reforzado por la complejidad de los procesos industriales que demandan condicio-

nes de operación más seguras y confiables, tal como debe ser garantizada para cualquier proceso productivo. Fundamentalmente, un sistema de FDI se compone de tres elementos, tal como se muestra en la Figura 1: a) un mecanismo de generación de residuos, b) un componente para la evaluación de los residuos y, c) un mecanismo de toma de decisiones. De esos tres elementos, el más crítico es el sistema de generación de residuos, mismo que provee las bases para el diagnóstico y las tomas de decisiones correspondientes.

Una clasificación de generadores de residuos establece técnicas basadas en:

Artículo recibido el 13 de mayo, 2014; revisado el 22 de diciembre, 2014.

Este trabajo ha sido co-financiado por el CDCHTA de la Universidad de Los Andes, en el marco del Proyecto No. I-1302-12-02-B, por lo que se expresa un reconocimiento por el apoyo financiero.

Autor para correspondencia: Av. Alberto Carnevalli. Complejo Universitario La Hechicera. Mérida, 5101, Venezuela. e-mail: ilich@ula.ve

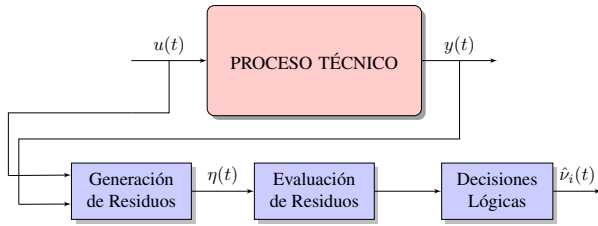


Figura 1. Diagrama de bloques de un sistema de FDI.

1. Redundancia física (RF)
2. Manejo de datos
3. Modelo matemático

La RF consiste en disponer de réplicas físicas de los componentes bajo estudio. En el manejo de datos e información de los procesos, fundamentalmente se disponen de mecanismos de manejo de datos y conocimiento: reconciliación de datos, métodos numéricos convencionales, aprendizajes de máquinas, modelos heurísticos, modelos cualitativos, entre otros.

En la metodología que utiliza un modelo matemático se han desarrollado dos direcciones: a) Métodos de estimación paramétrica; b) Método de Redundancia Analítica (RA).

La idea fundamental en el método de estimación paramétrica es que la condición operacional del sistema es repetidamente identificada en línea y los resultados son comparados con un modelo de referencial que se ha obtenido, inicialmente, bajo condiciones sin fallas.

La RA consiste en el uso de modelos para reproducir el comportamiento del componente o sistema bajo evaluación. En todos los casos, los residuos se generan por la diferencia entre señales del sistema real y las producidas por su contraparte redundante.

Cuando se emplean modelos para la generación de residuos se deben considerar aspectos importantes de los sistemas de producción:

- Ambientes industriales ruidosos (perturbaciones).
- Modelos aproximados (Incertidumbres).
- Diferentes escenarios de producción.
- Límites físicos de producción.

Esos aspectos conllevan a considerar que los filtros de detección deben ser capaces de responder satisfactoriamente bajo condiciones adversas debido a la realidad de los procesos productivos. Para el caso de la RA, se utiliza un modelo analítico, y cuando este modelo de diagnóstico toma en consideración las señales de perturbación y las

incertidumbres, entonces se trata de un problema de detección robusta de fallas (DRF).

Así, para la FDI basada en modelos es esencial la generación de residuales, para lo cual existe una rica variedad de técnicas, como el método de ecuaciones de paridad y los métodos basados en observadores de estados.

Una técnica muy popular para la generación de residuos consiste en diseñar observadores de Luenberger, que ha sido propuesta por [1, 2]. Esta técnica es muy útil en el marco de los sistemas LTI. Su principal inconveniente es el determinismo del modelo, el cual no maneja señales de perturbación e incertidumbres. Sin embargo, se pueden hacer algunas modificaciones al observador original de tal manera de establecer condiciones de desempeño robusto a ser satisfechas. Así, algunos métodos han sido presentados por [3], con el fin de sobrellevar el problema de robustez en la generación de los residuos, incluyendo técnicas temporales-frecuenciales [4].

Por el lado de los observadores proporcional-integral (PIO), en [5] se diseña un filtro de FDI para sistemas LTI como un PIO, dadas las ventajas de éste respecto a la estimación simultánea de estados y de entradas desconocidas. No se consideran las incertezas del modelo de diagnóstico. En [6] se aborda el diseño de un PIO, para sistemas LTI, de manera estimar falla de actuador (matriz de control) o falla en el sensor (matriz de salida), bajo la presencia de señales de perturbación.

Un estudio comparativo de las técnicas de FDI basados en observadores es presentado en [7]. Allí, se aborda el problema FDI a partir de observadores para sistemas LTI, con un énfasis en robustez respecto a la estimación de entradas desconocidas. Se analizan cinco estructuras del observador: observador de Luenberger, el observador de perturbación (DO), el observador de entrada desconocida (UIO), el PIO y el PIO de "aclaramiento". La robustez se define en conexión a la detección de la falla, no tomándose en cuenta incertidumbres del modelo de diagnóstico.

Por el lado de sistemas de diagnóstico con incertidumbres, una técnica de tolerancia a fallas para esta clase de sistemas es presentada en [8] y que se referencia como la detección de fallas en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. De igual manera, el problema es tratado en [9, 10], para los sistemas con incertidumbres politópicas. En todos estos casos no se definen condiciones características para la detectabilidad y la separabilidad de las fallas. Por el contrario, en [11] se presenta una revisión y solución formal solo para el caso de los sistemas lineales variantes en parámetros (LPV). Es importante destacar que las condiciones de detectabilidad de fallas se presentan como extensión de las condiciones geométricas para sistemas LTI descritas en [12], para una clase de sistemas LPV y quasi-LPV. El filtro de FDI se diseña como un observador de Luenberger. Los resultados son reforzados en [13], ya que se consideran modelos de diagnósticos con incertidumbres en la matriz

de estado y en la matriz de control. Estos resultados son extendidos en [14]

Por otro lado, el problema de DRF está muy relacionado al problema de filtraje robusto. En ambos casos, se utiliza una estimación de estados para producir las señales residuales. En este orden de ideas, en los años recientes mucha investigación se ha dedicado al filtraje robusto para sistemas politópicos, no así para la DRF, (ver [15] y sus referencias). Recientemente han sido presentados algunos resultados para la DRF en sistemas politópicos, [16]. En [17] se presenta un método de diseño de filtros basado en deconvolución, donde se trata solamente el problema de detección. A partir de múltiples observadores de Luenberger, en [18] se presenta un método de diagnóstico robusto de fallas basado en optimización convexa, utilizando una representación afín, mediante LMIs, para los sistemas politópicos. El diseño de los filtros de FDI preserva condiciones de desempeño en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, irrespectivamente de la incertidumbre en los parámetros del sistema. Estableciéndose, además, condiciones de detectabilidad y separabilidad de fallas en sistemas politópicos. Estos resultados son aplicados al caso de tiempo discreto en [19], y son complementarios a las técnicas de síntesis de filtros robustos presentados en [14, 18].

De manera de aprovechar las ventajas de los PIOs: simplicidad, robustez, estimación de entradas desconocidas, recuperación de la transferencia de lazo (LTR); en este trabajo se presenta el diseño de filtros múltiples de FDI para sistemas LPV, donde las incertidumbres, en todas las matrices del modelo de diagnóstico, se describen como politopos. El diseño de los filtros como PIOs se realiza por solución de un problema de control por realimentación estática de la salida, tal como se describe en [20]. El filtro de FDI, basado en PIO, permite el diagnóstico de las fallas por reconstrucción de las mismas, a través de su estimación como entradas desconocidas.

El resto de la contribución está organizado como se explica. En la Sección 2 se presentan resultados preliminares para el diseño de filtros (observadores), proporcionándose versiones extendidas de la caracterización de las normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ como LMIs. En la Sección 3 se presenta una solución al problema de síntesis de sistemas de diagnóstico de fallas, también como en la Sección 3.3 se describe el método de FDI multi-objetivo. Finalmente se presentan un ejemplo numérico y los comentarios concluyentes.

Notación. \mathbb{R} es el conjunto de números reales. Para una matriz A , A^T denota su transpuesta. $\text{tr}(A)$ define la traza de la matriz A . \mathcal{L}_2 es el espacio de Hilbert de señales vectoriales definidas en $(-\infty, \infty)$, con producto escalar $\langle x | y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)^* y(\tau) d\tau$ y tal que $\|x\|_2 \triangleq \langle x | x \rangle^{1/2} < \infty, \forall x \in \mathcal{L}_2$. En las particiones de matrices simétricas \star denota cada uno de sus bloques simétricos. \mathbb{I} define la matriz identidad de dimensión apropiada.

2. PRELIMINARES

En esta sección se establecen algunos resultados preliminares a los fines de dar condiciones de desempeño adicionales en el análisis de los sistemas lineales a tiempo continuo (LTI). Considérese el sistema LTI Sea el sistema LTI

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\omega \\ y &= Cx + D\omega \end{aligned} \quad (1)$$

Lema 1 (Desempeño \mathcal{H}_2 relajado) *Considérese el sistema (1) con $D = 0$. Para $P = P^T > 0$, las siguientes declaraciones son equivalentes*

i) *A es estable y $\|C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B\|_2^2 < \mu$.*

ii) *Existen P y Z , tales que: $\text{tr}(Z) < 1$ y*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & -\mu \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0, \quad (2)$$

iii) *Existen P, Z y G tales que: $\text{tr}(Z) < 1$ y*

$$\begin{bmatrix} -(G + G^T) & G^T A + P & G^T B & G^T \\ A^T G + P & -P & 0 & 0 \\ B^T G & 0 & -\mu \mathbb{I} & 0 \\ G & 0 & 0 & -P \end{bmatrix} < 0, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0,$$

iv) *Existen P, Z y G , tales que: $\text{tr}(Z) < 1$ y*

$$\begin{bmatrix} -(G + G^T) & G^T A + P + G^T & G^T B \\ A^T G + P + G & -2P & 0 \\ B^T G & 0 & -\mu \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0,$$

Demostración

La equivalencia entre las tres primeras declaraciones han sido mostrada en el Teorema 3.3 de [21], que se basa en el lema de proyección y su recíproco. La equivalencia entre ii) y iv) es mostrada en [22].

Se sabe que cuando existen relaciones entre la matriz dinámica del sistema y la matriz de Lyapunov se obtienen resultados conservativos, tal como es el caso de sistemas con incertidumbres politópicas, [23]. Esta situación se solventa, en cierto grado, desacoplando ambas matrices. Además, la declaración iv) en el Lema 1 provee una representación mejorada de la condición de desempeño en \mathcal{H}_2 presentada en [21].

De la misma forma que para el caso \mathcal{H}_2 , existen algunos resultados para mejorar el desempeño en \mathcal{H}_∞ , tal como se muestra a continuación.

Lema 2 (Desempeño \mathcal{H}_∞ Relajado) *Considérese el sistema (1). Con $P = P^T > 0$ y la matriz G , las siguientes declaraciones son equivalentes:*

i) *A es estable y $\|C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D\|_\infty < \gamma$.*

ii) *Existe P , tal que*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 \mathbb{I} & D^T \\ C & D & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (5)$$

iii) *Existen P y G tal que, para $\tau \gg 1$*

$$\begin{bmatrix} -(G + G^T) & G^T A + P + \tau G^T & 0 & G^T B \\ A^T G + P + \tau G & -2\tau P & C^T & 0 \\ 0 & C & -\mathbb{I} & D \\ B^T G & 0 & D^T & -\gamma^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (6)$$

Demostración

Las condiciones i) y ii) representan el bien conocido *Lema Real Acotado*. La equivalencia entre ii) y iii) puede ser vista en [22].

A continuación, estos resultados son aplicados para establecer algunas para el diagnóstico de fallas que, adicionalmente, proporcionan un método de síntesis para los filtros de FDI.

3. FILTROS PARA EL DIAGNÓSTICO ROBUSTO DE FALLAS (RFDI)

El diagnóstico de fallas se inicia por un mecanismo de generación de residuos. La manera más común de generación de residuos usando modelos de diagnóstico es a través de un observador, mismo que produce, en general, un estimado de los estados del sistema. En el caso de presencia de fallas, estos estados estimados difieren de los reales por lo que la dinámica del error de estimación no tenderá asintóticamente a cero. Esta diferencia constituye el residuo debido a la falla. Todo lo anterior es cierto en el contexto de un conocimiento perfecto del sistema y de un escenario libre de perturbaciones. Cuando cualquier tipo de ruido o perturbación está presente dentro del sistema, es necesario considerar una cota o umbral para los residuos, a partir del cual se considera que una falla se ha producido. Sin embargo, esto es otro marco hipotético para los sistemas donde los parámetros cambian rápidamente o existen parámetros desconocidos. Esto constituye el problema de diagnóstico robusto de fallas que aún permanece abierto. Así, generando una extensión al

método de Luenberger clásico y considerando perturbaciones e incertidumbre politópicas, enseguida se presenta una mecanismo para el diagnóstico robusto de fallas. Considérese el siguiente sistema LPV

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_1(\alpha)w(t) + B_2(\alpha)u(t) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t), \end{aligned} \quad (7)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $w(t) \in \mathbb{R}^q$ son perturbaciones desconocidas, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ son los controles, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ son las salidas medidas, mismas que se van a comparar con las salidas estimadas desde un observador. Se considera que las matrices del sistema son inciertas y pertenecen a un conjunto politópico convexo tal que $\forall \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ es definido como

$$\Omega = \left\{ (A(\alpha), B_1(\alpha), B_2(\alpha), C(\alpha)) \mid (A(\alpha), B_1(\alpha), B_2(\alpha), C(\alpha)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A^{(i)}, B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, C^{(i)}) \right\}. \quad (8)$$

Para efectos del diagnóstico de fallas, se considera un modelo de anomalías como un término adicional a (7), esto es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_1(\alpha)w(t) + \\ &B_2(\alpha)u(t) + \sum_{k=1}^M L_k(\alpha)v_k(t) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t), \end{aligned} \quad (9)$$

donde $v_k(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ son los *modos de fallas* y son señales desconocidas, y $L_k(\alpha)$ son las *direcciones de fallas*, las cuales pertenecen al politopo, esto es, $\forall \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$,

$$\Omega = \left\{ (A(\alpha), B_1(\alpha), B_2(\alpha), C(\alpha), L_k(\alpha)) \mid (A(\alpha), B_1(\alpha), B_2(\alpha), C(\alpha), L_k(\alpha)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A^{(i)}, B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, C^{(i)}, L_k^{(i)}(\alpha)) \right\}. \quad (10)$$

para todo $k = 1, 2, \dots, M$. Tal como en [11], las direcciones de fallas inciertas imponen el diseño de generadores de residuos robustos, que a continuación se presenta como un PIO.

A partir del modelo de diagnóstico (9), un PIO generalizado para efectos de FDI es [20]:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= F\zeta(t) + K_I \vartheta + K_P (y(t) - \tilde{y}(t)) + B_2(\alpha)u(t), \\ \dot{\vartheta}(t) &= G\vartheta + H (y(t) - \tilde{y}(t)) \\ \tilde{y}(t) &= J\zeta(t) \end{aligned} \quad (11)$$

donde las matrices F, G, H, J, K_P y K_I , de dimensiones apropiadas, se definen como las matrices del observador a ser determinadas, a condición de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} e(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (12)$$

siendo $e(t) = x(t) - \zeta(t)$ el error de la estimación de estados.

En el PIO, K_P y K_I son las ganancias proporcional-integral, la variable o señal ϑ se relaciona con la integral "pesada" del error de estimación de la salida, y se puede usar para estimar entradas desconocidas. La matriz G representa el coeficiente de "aclaramiento" y tiene el efecto de regular la respuesta transitoria de este observador. La matriz H es un coeficiente de efecto integral también, se usa para mejorar el margen de estabilidad. Nótese que si $G = 0$ se tiene un PIO clásico. Las matrices G y H se pueden escoger *a priori*.

De la dinámica del error se tiene

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\zeta} = (A(\alpha) - K_P C(\alpha))x - (F - K_P J)\zeta \\ &\quad - K_I \vartheta + B_1(\alpha)w(t) + \sum_{k=1}^M L_k(\alpha)v_k(t) \\ \dot{\vartheta} &= G\vartheta + H(C(\alpha)x - J\zeta) \end{aligned} \quad (13)$$

Por consiguiente, si $F = A(\alpha)$ y $J = C(\alpha)$, entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A(\alpha) - K_P C(\alpha) & -K_I \\ HC(\alpha) & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \vartheta \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^M L_k(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} v_k \\ &= \mathfrak{A}(\alpha) \begin{pmatrix} e \\ \vartheta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} w \\ &\quad + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^M L_k(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} v_k \end{aligned} \quad (14)$$

Allí, la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ corresponde a

$$\mathfrak{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_P & -K_I \\ H & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_p \end{pmatrix}. \quad (15)$$

donde \mathbb{I}_p es una matriz identidad de orden p . Se puede notar que, en ausencia de perturbaciones $w(t)$ y de fallas $v_k(t)$, la condición (12) se satisface si la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ es cuadráticamente estable. Esto es lo que permitirá generar los residuos por comparación de la salida estimada $\tilde{y}(t)$ respecto a la salida real $y(t)$, es decir $r_y(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$. Así, bajo la consideración del problema de estabilización de la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$, entonces se deben seleccionar apropiadamente las matrices G, H, K_P y K_I . En ese sentido, sean

las matrices

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_o(\alpha) &= \begin{pmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_o = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_m \end{pmatrix}, \\ \mathcal{C}_o(\alpha) &= \begin{pmatrix} C(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_q \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (16)$$

y la matriz

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -K_P & -K_I \\ H & G \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Las matrices en (16) definen el sistema dinámico

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathcal{A}_o(\alpha)z(t) + \mathcal{B}_o v(t) \\ \eta(t) &= \mathcal{C}_o(\alpha)z(t) \end{aligned} \quad (18)$$

Se puede verificar que el par $(\mathcal{A}_o(\alpha), \mathcal{B}_o)$ es controlable. Además, el sistema (18) cumple las condiciones para el diseño de una ganancia para el problema de SOF. Por consiguiente, la matriz \mathbb{K} corresponde a la ganancia de realimentación para el problema de control por SOF del sistema (18), [20].

Lema 3 Sea el sistema (18). Dicho sistema admite un control por SOF de la forma $v(t) = \mathbb{K}\eta(t)$ tal que, en lazo cerrado, la dinámica es asintóticamente estable.

Demostración

En efecto, si $v(t) = \mathbb{K}\eta(t)$, entonces la matriz dinámica de lazo cerrado es

$$\mathcal{A}_o(\alpha) + \mathcal{B}_o \mathbb{K} \mathcal{C}_o(\alpha) = \mathfrak{A}(\alpha)$$

Así, se distingue un problema de estabilización en lazo cerrado, tal como se presenta en los diferentes escenarios del control automático de sistemas dinámicos [24]. En consecuencia, la estabilización de la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ del PIO corresponde al diseño de la ganancia \mathbb{K} para el problema de estabilización por SOF del sistema (18). Esto tiene la ventaja de que el diseño se obtiene por solución directa de un problema de control estabilizante para sistemas LPV. El diseño de la ganancia \mathbb{K} se puede obtener por control LMI, según los resultados mostrados en [20]. La estabilización de la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ permite satisfacer la condición (12), lo cual conlleva a obtener los residuos. Bajo la condición (12), los residuos $r_y(t)$ serán nulos en ausencia de perturbaciones y fallas, de manera que una primera evaluación es imponer un umbral que se define por la minimización de los efectos de las perturbaciones sobre $r_y(t)$. Esta minimización se puede realizar imponiendo características de desempeño óptimo-robusto sobre el diseño de la ganancia \mathbb{K} en consideración del efecto de $w(t)$ en los residuos $r_y(t)$. La detección de la presencia de una falla se analiza cuando, para cualquier modo de falla $v_k(t) \neq 0$, los residuos $r_y(t)$ superan el umbral, es decir

$$\mathfrak{N}(r_y(t)) < T_h \quad \text{si} \quad v_k(t) = 0, \quad (19)$$

$$\mathfrak{N}(r_y(t)) < T_h \quad \text{si} \quad v_k(t) \neq 0, \quad (20)$$

donde $\mathfrak{N}(\cdot)$ es una función que cuantifica el “tamaño” de la señal residual $r_y(t)$, es decir, es una norma para dicha señal. T_h es el umbral. En este trabajo las normas que se emplean son $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$, caracterizadas como LMIs.

3.1 Condiciones para RFDI

Para el caso de sistemas LTI con modelos ciertos son bien conocidas las condiciones para el diagnóstico de fallas [12]. Para los sistemas LTV esas condiciones son extendidas en [25]. En el caso de sistemas con incertidumbres politópicas los resultados en esas direcciones han sido los presentados en [11, 13], como generalizaciones de las condiciones geométricas dadas en [12], manteniendo certidumbre en la matriz de salida del modelo de diagnóstico.

A continuación se presentan condiciones de detectabilidad y separabilidad de fallas para sistemas inciertos, como extensiones de las condiciones de diagnóstico en sistemas lineales variantes en el tiempo (LVT) [25] y las mostradas en [11, 13].

Considérese el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + \sum_{k=1}^M L_k v_k(t) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t), \end{aligned} \quad (21)$$

donde las matrices inciertas pertenecen a un politopo tal que $\forall \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ es definido por

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)) \mid (A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)) \right. \\ &= \left. \sum_{i=1}^N \alpha_i (A^{(i)}, B^{(i)}, C^{(i)}) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

3.1.1 Condición de Detectabilidad

Definición 1 Sea \mathcal{C} denotando el $\ker C(\alpha), \forall \alpha$. Entonces un sub-espacio \mathcal{W} se dice un sub-espacio $(\mathcal{C}(\alpha), \mathcal{A}(\alpha))$ -invariante asociado al sistema LPV (21), y que se denotará como $(\mathcal{C}, \mathfrak{A})$ -invariante, si cualquiera de las condiciones equivalente siguientes se cumplen:

1. Existe una transformación lineal $G : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$ tal que para el sub-espacio $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$ y para todo instante de tiempo $\alpha \in \mathcal{P}$

$$(A(\alpha) + G(\alpha)C(\alpha))\mathcal{W} \subset \mathcal{W} \quad (23)$$

2. Para todo $\alpha \in \mathcal{P}$

$$A(\alpha)(\mathcal{W} \cap \mathcal{C}) \subset \mathcal{W} \quad (24)$$

Esta definición de la $(\mathcal{C}, \mathfrak{A})$ -invarianza para sistemas LPV asegura la existencia de una ganancia $G(\alpha)$ para un observador de estados. En el caso particular, y de acuerdo a la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$, la ganancia $G(\alpha)$ está asociada a K_P .

Para garantizar la detectabilidad de fallas, se debe cumplir que ninguna dirección de falla pueda ser proyectada al sub-espacio inobservable del sistema LPV. Se sabe que el sub-espacio inobservable del sistema (21) es [18]:

$$U_{os} := \bigcup_{i=1}^N \left[\bigcap_{j=0}^{n-1} \ker(C^{(i)} A^{(i)j}) \right]. \quad (25)$$

En consecuencia, la condición de detectabilidad se establece como sigue:

Teorema 2 Si $W_{L_k}(\alpha) = \text{Im}(L_k(\alpha))$, es el sub-espacio debido a la dirección de falla L_k para todo α , entonces $W_L = \bigcup_{k=1}^M [\text{Im}(L_k(\alpha))]$, corresponde al sub-espacio mas grande generado por las direcciones de fallas. Por lo tanto, para el sistema (21), la k -ésima falla es detectable si

$$W_{L_k} \cap U_{os} = \{0\}, \quad k = 1, \dots, M. \quad (26)$$

Demostración

La prueba es una generalización de los resultados mostrados en [12, 25]. Sea $\mathcal{O}(A^{(i)}, B^{(i)})$ la matriz de observabilidad del sistema (21), tal como se define en [26], entonces $\mathbb{R}^n = \text{Im}(\mathcal{O}) \oplus U_{os}$. Así, $W_L = \text{Im}(\mathcal{O}W_L) \oplus \ker(\mathcal{O}W_L)$. Si la condición (26) es satisfecha, entonces $W_{L_k} = \text{Im}(\mathcal{O}L_k)$, lo cual significa que las fallas se propagan sobre el sub-espacio de salida del sistema, ya que las direcciones de fallas se proyectan en el sub-espacio observable.

Cada dirección de falla $L_k(\alpha), k = 1, \dots, M$, se puede considerar que genera un sub-espacio que es linealmente independiente del resto de los sub-espacios generados por las demás direcciones de fallas, para todo α variante en el tiempo, tal como se asume para sistemas LTI:

$$W_{L_k} \bigcap_{i=1, i \neq k}^M W_{L_i} = \{0\} \quad (27)$$

Es claro que esta condición facilita la detectabilidad de las fallas en el contexto de los sistemas LPV.

Mediante la Definición 1 y el Teorema 2 se puede establecer la siguiente proposición para el diseño de un PIO de manera de detectar fallas en sistemas LPV:

Proposición 3 Para el sistema LPV (21), siendo $(\mathcal{C}, \mathfrak{A})$ -invariante, se puede diseñar un PIO de la forma (11), con la condición (12), de modo que la proyección de las fallas en el sub-espacio de salida generan los residuos $r_y(t)$.

En efecto, la ganancia $G(\alpha)$ de la $(\mathcal{C}, \mathfrak{A})$ -invarianza se obtiene mediante el diseño del PIO, asegurando la estabilización de la dinámica del error. Si la condición de detectabilidad se satisface, entonces para cualquier modo de falla $v_k(t) \neq 0$, para $t \geq t_1$, los residuos $r_y(t) \neq 0$ para $t \geq t_1$.

3.1.2 Condición de Separabilidad

La condición de separabilidad se caracteriza por el hecho de que cada sub-espacio generado por cada dirección de falla y proyectado sobre el sub-espacio de salida deben ser independiente. Esto es:

Teorema 4 Sea $W_{L_k} = \bigcup_{i=1}^N \left[\text{Im}(L_k(\alpha)) \right]$, $k = 1, \dots, M$, el sub-espacios debido a las direcciones de fallas y asumiendo que la condición (27) se satisface. Para el modelo de diagnóstico (21), sea $\mathcal{O}(A^{(i)T}, B^{(i)T})$ su matriz de observabilidad [26], entonces las fallas son separables si cada una de las direcciones de ellas sobre la estimación de salida están aisladas:

$$\mathcal{O}W_{L_k} \cap \sum_{i \neq j}^M \mathcal{O}W_{L_j} = \{0\}, \quad k, j = 1, \dots, M. \quad (28)$$

Demostración

Al igual que para la condición de detectabilidad, la demostración es una extensión de los resultados en [12, 25]. Si \mathcal{O}_k es el sub-espacio observable más grande que contiene a W_{L_k} ; esto es, existe un aplicación de proyección $\mathcal{P}_k : W_{L_k} \rightarrow \mathcal{O}_k$ tal que para cada W_{L_k} , \mathcal{P}_k proyecta a una dirección particular la dirección de falla $\text{Im } L_k$ al sub-espacio de salida, entonces, dada la condición (27) y la condición (28), existirán \mathcal{P}_j , $j = 1, \dots, M$, $j \neq k$, que proyectan el resto de las direcciones de fallas al sub-espacio \mathcal{O}_j , en direcciones independientes.

Los proyectores se definen como observadores. Utilizando algoritmos de generación de sub-espacios $(\mathcal{C}, \mathfrak{A})$ -invariantes se diseñan dichos proyectores [12, 13], aunque resulta ser un procedimiento complejo. La condición de separabilidad establece que las direcciones de fallas son mapeadas sobre el espacio de observabilidad, a partir de lo cual es factible su aislamiento. Así, las fallas pueden ser asignadas a direcciones particulares sobre las salidas estimadas. Adicionalmente, de manera de separar los residuos producidos por cada falla, es posible diseñar un único filtro (observador), siguiendo la complejidad del procedimiento basado en sub-espacios $(\mathcal{C}, \mathfrak{A})$ -invariantes, por lo que toda la información de los residuos estarán contenidos en las salidas simples y pudiéndose definir índices de desempeño según las características de las fallas.

De acuerdo a la Proposición 3, existe un PIO que permite la detectabilidad de las fallas por estabilización de la

matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$. Si se satisface la condición de separabilidad de fallas, el algoritmo de sub-espacios invariantes resulta impráctico debido a la incertidumbre en la matriz de salida $C(\alpha)$, de modo que generar un único PIO para el aislamiento del conjunto de fallas es poco factible. Además, si se considera un sistema con perturbaciones, tal como el definido por (9), el diseño del PIO debe considerar la atenuación de las perturbaciones. A partir de este panorama, es posible considerar el diseño de PIO múltiples, considerando un índice de desempeño para cada una de las direcciones de fallas separables y para las perturbaciones, entonces se pueden derivar características de desempeño multivariables.

3.2 Multifiltraje para RFDI

A los efectos de obtener la separación de fallas y al mismo tiempo atenuar el ruido exógeno, se aplica el multifiltraje, de manera similar al usado en [18] pero diseñando PIO. En este caso, cada PIO (filtro) es diseñado para satisfacer diferentes requerimientos, produciéndose una señal residual aislada de las producidas por los otros filtros, ya que se debe hacer sensible el residual particular al modo de falla correspondiente y, al mismo tiempo, atenuar los otros modos de fallas conjuntamente con las señales de perturbación.

A partir del PIO dado por (11), el banco de filtros, para $k = 1, \dots, M$, está dado por

$$\begin{aligned} \zeta_k(t) &= F\zeta_k(t) + K_{Ik}\vartheta_k + \\ &\quad K_{Pk}(y(t) - \tilde{y}_k(t)) + B_2(\alpha)u(t), \\ \dot{\vartheta}_k(t) &= G_k\vartheta_k + H_k(y(t) - \tilde{y}_k(t)) \\ \tilde{y}_k(t) &= J\zeta_k(t) \end{aligned} \quad (29)$$

donde, $\zeta_k(t)$ y $\tilde{y}_k(t)$ representan los estados estimados y las salidas estimadas para el filtro k -ésimo, donde los parámetros de diseño son: K_{Pk} , K_{Ik} , G_k y H_k ; bajo la consideración de que $F = A(\alpha)$, $J = C(\alpha)$. Entonces, la dinámica de estimación corresponde a ese k -ésimo filtro es

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_k(t) \\ \dot{\vartheta}_k(t) \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_k(\alpha) \begin{pmatrix} e_k(t) \\ \vartheta_k(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_k(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{w}_k(t) + \begin{pmatrix} L_k(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} v_k(t) \quad (30)$$

donde

$$\mathfrak{A}_k(\alpha) = \begin{pmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_{Pk} & -K_{Ik} \\ H_k & G_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_p \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$B_k(\alpha) = [B_1(\alpha) \quad \sum L_{k0}(\alpha)], \quad (32)$$

$$\tilde{w}_k(t) = [w(t)^T \quad v_{k0}^T(t)]^T. \quad (33)$$

$v_k(t)$ y $L_k(\alpha)$ son los modos y dirección de fallas para el k -ésimo filtro, y que es sensible a esa condición de falla. El resto de los modos y direcciones de fallas, es decir, $v_{k0}(t)$ y $\sum L_{k0}(\alpha)$, son incluidas dentro del vector de perturbaciones extendido $\tilde{w}_k(t) \in \mathbb{R}^{n_f+q-1}$ y $\mathcal{B}_k(\alpha)$, respectivamente, y que se debe atenuar en los residuos. Esto se hace de manera de minimizar los efectos de las otras fallas, junto con las perturbaciones externas, en el mismo proceso de optimización.

Siguiendo la definición de las matrices (16) y la matriz de ganancia (17), se genera el sistema dinámico extendido para el k -ésimo filtro

$$\begin{aligned} \dot{z}_k(t) &= \mathcal{A}_o(\alpha)z_k(t) + \mathcal{B}_o v_k(t) + \mathcal{B}_{1k}(\alpha)\tilde{w}_k(t) \\ &\quad + \mathcal{L}_k(\alpha)v_k(t) \\ \eta_k(t) &= \mathcal{C}_o(\alpha)z_k(t) \end{aligned} \quad (34)$$

donde

$$\mathcal{B}_{1k}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_k(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_k(\alpha) = \begin{pmatrix} L_k(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Nótese que $\eta_k(t)$ corresponde a la señal residual del filtro. El diseño del filtro se obtiene como solución de un problema de control óptimo-robusto por SOF, donde la ganancia de realimentación \mathbb{K}_k se obtiene en términos de índices de desempeño en \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ caracterizados como LMIs. Para la dinámica (34), el rechazo a la perturbación $\tilde{w}_k(t)$ se obtiene minimizando la norma \mathcal{H}_2 ó \mathcal{H}_∞ del sistema $T_{\tilde{w}_k \rightarrow \eta_k}(s) = \mathcal{C}_o(\alpha)(s\mathbb{I} - \mathcal{A}_k(\alpha))^{-1}\mathcal{B}_{1k}(\alpha)$, con un control por SOF de la forma $v_k(t) = \mathbb{K}_k\eta_k(t)$, según el Lema 3. Enseguida se muestra el diseño del filtro.

3.2.1 Multifiltraje para RFDI en \mathcal{H}_2

Teorema 5 *Considérese el sistema (9) sobre el politopo (10), tal que se admiten las condiciones (27) y (28). Un filtro para la k -ésima falla, de la forma (29), garantizando un desempeño sub-óptimo en \mathcal{H}_2 para (30), es decir, $\|T_{\tilde{w}_k \rightarrow \eta_k}(s)\|_2^2 < \mu$, se obtiene a partir del siguiente problema de optimización:*

$$\begin{aligned} \min & \quad \text{tr}(Z_k), \quad \text{tal que} \\ & \quad Q_k, X_k, Z_k, P_k^{(i)} \\ & \quad i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -Q_k - Q_k^T & \Psi_{2,k} & Q_k^T \mathcal{B}_{1k}^{(i)T} \\ \star & -2P_k^{(i)} & 0 \\ \star & \star & -\mu\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (36) \\ \begin{bmatrix} P_k^{(i)} & \star \\ \mathcal{C}_o^{(i)} & Z_k \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M$, donde $\Psi_{2,k} = Q_k^T \mathcal{A}_o^{(i)} + \mathcal{B}_o X_k \mathcal{C}_o^{(i)} + P_k^{(i)} + Q_k^T$, $Q_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $Z_k \in \mathbb{R}^{s \times s}$, y $P_k^{(i)} = P_k^{(i)T} > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Así, la ganancia del estimador está dada por

$$\mathbb{K}_k = M_k^{-1} X_k, \quad \text{con} \quad M_k = \mathcal{B}_o^{-1} Q_k^T \mathcal{B}_o. \quad (37)$$

Demostración

A partir del Lema 1, se asume que hay una solución factible para el problema de optimización formulado. Mediante el cambio de variable $X_k = M_k \mathbb{K}_k$, con $Q_k^T \mathcal{B}_o = \mathcal{B}_o M_k$, para la LMI de la declaración *iv)* del Lema 1, se hacen las sustituciones respectivas y se llega a la LMI dado por (36).

Una vez obtenida la ganancia \mathbb{K}_k , de allí se generan las matrices del PIO. Se puede notar que en este problema de optimización se usa una función de Lyapunov dependiente de parámetro $P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i$, tal como se propone en [23], y también aplicada en filtraje robusto. Este hecho es una alternativa al conservatismo que se tiene cuando se usa una matriz de Lyapunov fija, $P^{(i)} = P$. De esta manera, es posible obtener una función de Lyapunov para cada vértice del politopo, sin forzar una única matriz de Lyapunov para todo el sistema de diagnóstico.

3.2.2 Multifiltraje para RFDI en \mathcal{H}_∞

Teorema 6 *Considérese el sistema (9) sobre el politopo (10), tal que se admiten las condiciones (27) y (28). Un filtro para la k -ésima falla, de la forma (29), garantizando un desempeño sub-óptimo en \mathcal{H}_∞ para (30), es decir, $\|T_{\tilde{w}_k \rightarrow \eta_k}(s)\|_\infty < \gamma$, a partir del siguiente problema de optimización:*

$$\begin{aligned} \min & \quad \|T_{\tilde{w}_k \rightarrow \eta_k}(s)\|_\infty, \quad \text{tal que} \\ & \quad Q_k, Y_k, P_k^{(i)}, \tau \\ & \quad i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -(Q_k + Q_k^T) & \Psi_{\infty,k} & 0 & Q_k^T \mathcal{B}_{1k}^{(i)T} \\ \star & -2\tau P_k^{(i)} & \mathcal{C}_o^{(i)T} & 0 \\ \star & \star & -\mathbb{I} & 0 \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (38)$$

donde $i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M$; $\Psi_{\infty,k} = Q_k^T \mathcal{A}_o^{(i)} + \mathcal{B}_o Y_k \mathcal{C}_o^{(i)} + P_k^{(i)} + \tau Q_k^T$, $Q_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$, y $P_k^{(i)} = P_k^{(i)T} > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Así, la ganancia \mathbb{K}_k se obtiene por

$$\mathbb{K}_k = M_k^{-1} Y_k, \quad \text{donde} \quad M_k = \mathcal{B}_o^{-1} Q_k^T \mathcal{B}_o \quad (39)$$

Demostración

De manera similar, si se asume que hay una solución factible para el problema de optimización formulado. Mediante el cambio de variable $Y_k = \mathcal{B}_o M_k$, donde $Q_k^T \mathcal{B}_o = \mathcal{B}_o M_k$, para el inciso *iii)* del Lema 2, se hacen las sustituciones respectivas y se llega a la LMI dado por (38).

3.3 RFDI via multifiltraje $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

En esta sección se presenta un procedimiento de síntesis de filtros para el diagnóstico robusto de fallas considerando perturbaciones y fallas, debilitando las condiciones de independencia entre fallas y perturbaciones al definir índices de desempeño multiobjetivos, según las características de estas señales. El método es una extensión de los resultados presentados en la última sección.

Considérese el modelo de diagnóstico dado por (9) sobre el politopo (10). De igual manera, se admiten las condiciones (27) y (28). Aún así, algunas direcciones de fallas pueden coincidir con componentes de la matriz $B_1(\alpha)$, lo cual implica que ciertas fallas pueden confundirse como señales de perturbación y el diagnóstico será más difícil de obtener. Así, es necesario evaluar, en lo posible, el efecto de las fallas y las perturbaciones en los residuos, por separado.

En consecuencia, considerando un PIO de la forma (29), la dinámica extendida será

$$\begin{aligned} \dot{z}_k(t) &= \mathcal{A}_o(\alpha)z_k(t) + \mathcal{B}_o v_k(t) + \mathcal{B}_{1k}(\alpha)w(t) + \\ &\quad \mathcal{B}_{Lk}(\alpha)v_{k0}(t) + \mathcal{L}_k(\alpha)v_k(t) \quad (40) \\ \eta_k(t) &= \mathcal{C}_o(\alpha)z_k(t) \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{B}_{1k}(\alpha) = \begin{pmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{Lk}(\alpha) = \begin{pmatrix} \Sigma L_{k0}(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$\mathcal{L}_k(\alpha) = \begin{pmatrix} L_k(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

Tal como se puede notar, se tiene la falla v_k que se desea diagnosticar, el resto de las fallas respresentas en $\mathcal{B}_{Lk}(\alpha)$ y las perturbaciones descritas por $\mathcal{B}_{1k}(\alpha)$, de manera separadas. En este caso, el diseño del multifiltraje se puede señalar imponiendo múltiples índices de desempeño. Esto es posible ya que la naturaleza de las perturbaciones, por lo general, son señales de alta frecuencia, mientras que las fallas son de baja frecuencia. Además, si la matriz de entrada de la perturbación es cierta, B_1 constante, entonces se aprovecha plenamente la ventaja del PIO en estimar esta señal, lo cual permite establecer un mejor criterio de definición del umbral en la detección de las fallas. Para alcanzar la separación de fallas, según las condiciones dadas, y el rechazo al ruido simultáneamente, se propone el diseño de filtros definiendo dos índices de desempeño:

1. El rechazo al ruido se obtiene minimizando la norma-2 del sistema $T_{w \rightarrow \eta_k}(s) = \mathcal{C}_o(\alpha)(sI - \mathcal{A}_k(\alpha))^{-1} \mathcal{B}_{1k}(\alpha)$, con, $\|T_{w \rightarrow \eta_k}\|_2 < \mu_k$.
2. El diagnóstico de fallas se obtiene minimizando la norma- ∞ del sistema $T_{v_{k0} \rightarrow \eta_k}(s) = \mathcal{C}_o(\alpha)(sI - \mathcal{A}_k(\alpha))^{-1} \mathcal{B}_{Lk}(\alpha)$, esto es, $\|T_{v_{k0} \rightarrow \eta_k}(s)\|_\infty < \gamma_k$.

En consecuencia, el siguiente resultado resume la técnica de multifiltrado para el diseño del banco de filtros.

Teorema 7 *Considérese el sistema (9) sobre el politopo (10), tal que se admiten las condiciones (27) y (28). Un filtro para la k -ésima falla, de la forma (29), que garantiza un desempeño sub-óptimo $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para (40), satisfaciendo las condiciones formales, se obtiene del siguiente problema:*

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \text{tr}(Z_k) + \gamma_k^2; \quad \text{tal que} \\ & Q_k, Y_k, Z_k, P_{2,k}^{(i)}, P_{\infty,k}^{(i)}, \gamma_k^2, \mu_k \\ & i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -Q_k - Q_k^T & \Psi_{2,k} & Q_k^T \mathcal{B}_{1k}^{(i)T} \\ * & -2P_{2,k}^{(i)} & 0 \\ * & * & -\mu_k \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} P_{2,k}^{(i)} & * \\ \mathcal{C}_o^{(i)} & Z_k \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} -(Q_k + Q_k^T) & \Psi_{\infty,k} & 0 & Q_k^T \mathcal{B}_{Lk}^{(i)T} \\ * & -2\tau P_{\infty,k}^{(i)} & \mathcal{C}_o^{(i)T} & 0 \\ * & * & -\mathbb{I} & 0 \\ * & * & * & -\gamma_k^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (44)$$

$$\Psi_{2,k} = Q_k^T \mathcal{A}_o^{(i)} + \mathcal{B}_o Y_k \mathcal{C}_o^{(i)} + P_{2,k}^{(i)} + Q_k^T$$

$$\Psi_{\infty,k} = Q_k^T \mathcal{A}_o^{(i)} + \mathcal{B}_o Y_k \mathcal{C}_o^{(i)} + P_{\infty,k}^{(i)} + \tau Q_k^T,$$

para $i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M$, donde $Q_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z_k \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $P_{2,k}^{(i)} = P_{2,k}^{(i)T} > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $P_{\infty,k}^{(i)} = P_{\infty,k}^{(i)T} > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_k \in \mathbb{R}^{q \times p}$ y $\tau \gg 1$. De modo que la ganancia \mathbb{K}_k se obtiene por

$$\mathbb{K}_k = M_k^{-1} Y_k, \quad \text{donde} \quad M_k = \mathcal{B}_o^{-1} Q_k^T \mathcal{B}_o \quad (45)$$

Demostración

Combinando los criterios dados en el caso \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ , a partir de cambios de variables se llega a la prueba. Así-mase que existe una solución factible para el problema de optimización según el Teorema 7, entonces de la relación $Y_k = \mathcal{B}_o M_k$, donde $Q_k^T \mathcal{B}_o = \mathcal{B}_o M_k$ y para la LMI de la declaración (iv) del Lema 1 y la LMI del inciso iii) del Lema 2, se hacen las sustituciones respectivas y se llegan a las LMIs (43) y (44), que se deben resolver simultáneamente. De manera de reducir el conservatismo se usan las versiones extendidas de las caracterizaciones de las normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ como LMIs, ya que no se generan productos que involucren matrices de Lyapunov y la matriz de ganancia de diseño \mathbb{K}_k , que contiene a las matrices del PIO, evitándose la necesidad de usar la misma matriz de Lyapunov para todas las especificaciones. Así, este hecho es muy

importante debido a que no solamente hay una matriz de Lyapunov dependiente de parámetros para cada filtro, sino que hay, además, una función de Lyapunov para cada especificación de desempeño.

4. EJEMPLO ILUSTRATIVO

En esta sección, a partir de un ejemplo numérica, se evalúa el método de diseño antes descrito. La idea, con el ejemplo, es permitir validar el marco teórico tanto para el diagnóstico de robusto de fallas como el rechazo de perturbaciones. Considérese el modelo LPV dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1.75 + \alpha_2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 + \alpha_1 & 0 & 0 \\ -1.8 & -1 & -0.75 + \alpha_1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 + \alpha_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 + \alpha_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 + \alpha_1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_2$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

donde los parámetros $\alpha_1 \in [-0.05, 0.05]$ y $\alpha_2 \in [-0.1, 0.1]$. Los vértices del politopo se estructuran con los valores mínimos y máximos de esos parámetros. Una primera inspección nos permite establecer la posibilidad del diagnóstico de las fallas, ya que las condiciones de detectabilidad y separabilidad se satisfacen, en este caso.

Los modos de fallas $v_k, k = 1, 2$, están asociados a anomalías del actuador. Del Teorema 7, las ganancias de SOF son

$$K_1 = \begin{bmatrix} -7.9119 & -2.1124 & -18.9915 & 33.7888 \\ 6.9848 & -0.8900 & -12.2796 & 3.6699 \\ 3.5951 & 1.8341 & -3.4365 & 3.4331 \\ 21.4275 & -0.2689 & -5.7651 & -16.2854 \\ -2.8732 & 0.8795 & -0.2863 & -0.4870 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 8.6759 & 10.2763 & -40.9927 & 35.2296 \\ 3.9900 & -17.2249 & 12.2568 & 7.6901 \\ 11.2313 & 8.0823 & -38.4933 & 30.9176 \\ 7.6496 & -47.3802 & 67.0193 & -38.9753 \\ -3.5801 & -0.0992 & 3.1071 & -0.4822 \end{bmatrix}$$

De modo que las matrices de os filtros tipos PIO son:

$$K_{P1} = \begin{bmatrix} 7.9119 & 2.1124 & 18.9915 \\ -6.9848 & 0.8900 & 12.2796 \\ -3.5951 & -1.8341 & 3.4365 \\ -21.4275 & 0.2689 & 5.7651 \end{bmatrix} \quad K_{I1} = \begin{bmatrix} -33.7888 \\ -3.6699 \\ -3.4331 \\ 16.2854 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = [-2.8732 \quad 0.8795 \quad -0.2863] \quad G_1 = -0.4870$$

$$K_{P2} = \begin{bmatrix} -8.6759 & -10.2763 & 40.9927 \\ -3.9900 & 17.2249 & -12.2568 \\ -11.2313 & -8.0823 & 38.4933 \\ -7.6496 & 47.3802 & -67.0193 \end{bmatrix} \quad K_{I2} = \begin{bmatrix} -35.2296 \\ -7.6901 \\ -30.9176 \\ 38.9753 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = [-3.5801 \quad -0.0992 \quad 3.1071] \quad G_2 = -0.4822$$

El primer filtro es sensible a la falla v_1 , mientras que el otro es para diagnosticar la falla v_2 .

Los resultados de las simulaciones se obtuvieron sobre 100 s, permitiendo la variación de los parámetros en todo momento, tal como se muestra en la Fig. 2.

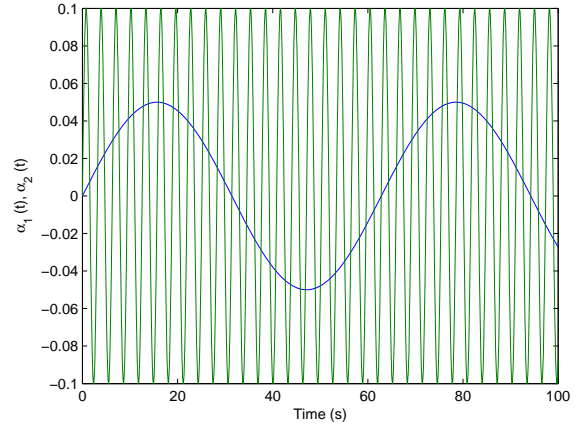


Figura 2. Los parámetros: α_1 y α_2 .

Enseguida, la Fig. 3 muestra los modos de fallas usados. Como se puede notar, el modo v_1 se presenta a partir de $t = 15s$, correspondiente a una onda sinusoidal. Mientras que v_2 a partir de $t = 45s$, y se representa por una señal diente de sierra. Para la generación de los residuos se consideran las salidas medidas, mismas que se muestran en la Fig. 4, y las salidas estimadas por cada filtro.

La Fig. 5 muestra las señales residuales obtenidas para cada filtro. Es fácil observar, de los residuos, que las fallas son detectadas y separadas, ya que cada filtro es más sensible a la falla que se quiere diagnosticar, lo cual se evidencia mas aún cuando se evalúan las señales $\vartheta(t)$ de cada filtro, que se muestran en la Fig. 6, donde se tiene una adecuada reconstrucción de los modos de fallas, de acuerdo al nivel de sensibilidad alcanzado por cada filtro, lo cual acompaña los residuos generados para distinguir cada una de las anomalías. Esto fortalece la técnica de diseño de PIO para el diagnóstico y reconstrucción de fallas en sistemas LPV, dándole validez numérica a los resultados teóricos..

5. COMENTARIOS CONCLUYENTES

En este trabajo se ha presentado una técnica para el diagnóstico robusto de fallas en sistemas con incertidumbres politópicas, mediante el diseño de filtros definidos por un Observador Proporcional-Integral (PIO). Se han establecido condiciones de detectabilidad y separabilidad de fallas para tales sistemas, derivadas de las condiciones para los sistemas LTV, las cuales son caracterizadas

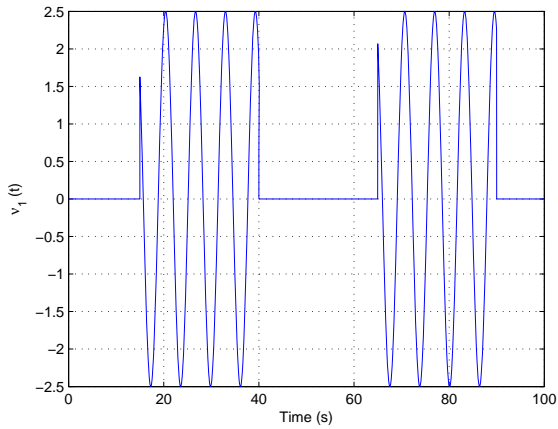


Figura 3. Modos de fallas.

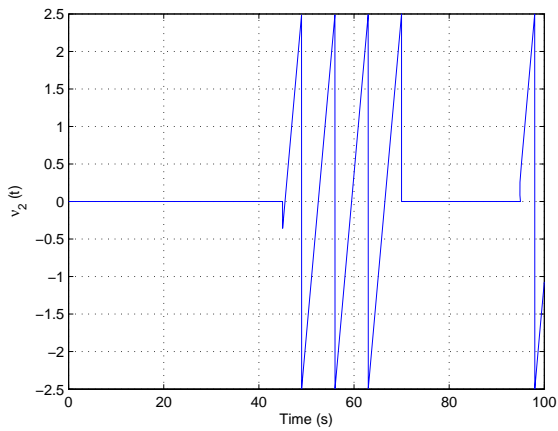
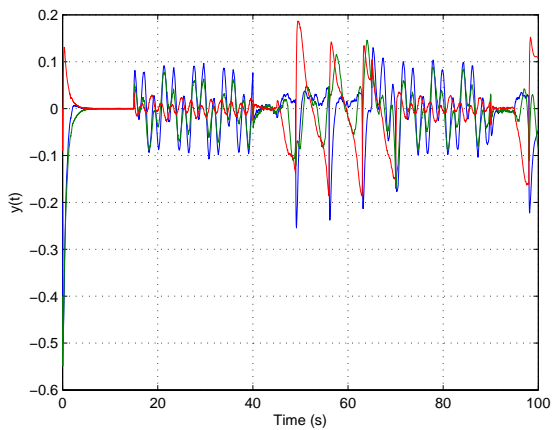


Figura 4. Las salidas.



por extensiones de los sub-espacios invariantes de sistemas inciertos y del enfoque algebraico de dichas condi-

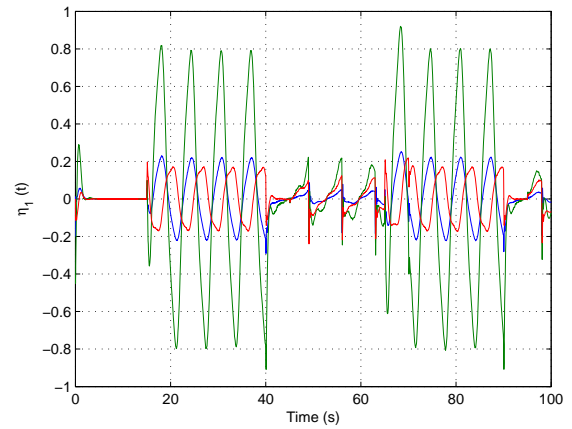
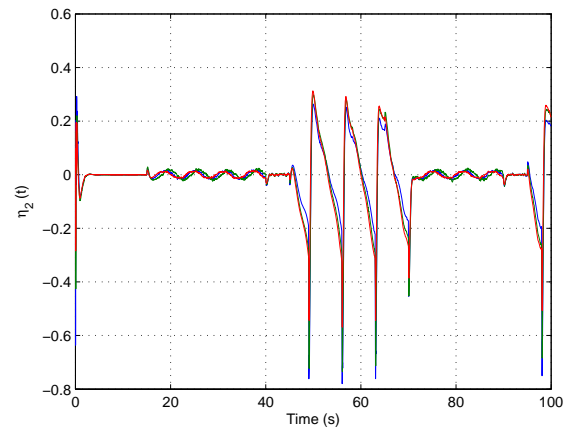


Figura 5. Residuos.



ciones. El diagnóstico de fallas se obtiene a partir de las condiciones establecidas y definiendo índices de desempeño en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, caracterizados como versiones extendidas de LMIs. La síntesis de los filtros de diagnóstico se obtiene por solución numérica de las LMIs, transformando el diseño de las matrices del PIO como un problema de control óptimo robusto por realimentación estática de la salida (SOF), considerando especificaciones multi-objetivos, lo que permite extensiones según la naturaleza de las fallas y sus características como señales. Tomando en cuenta que un PIO permite la reconstrucción de entradas desconocidas (fallas), el diagnóstico se realiza por la separación de fallas mediante multifiltraje. Esto conlleva al diseño de un filtro para cada falla, tomando las fallas como perturbaciones y minimizando una medida de desempeño en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Para una mejor separación y atenuación del ruido, mediante la reducción del conservatismo de las técnicas tradicionales, se han considerado versiones extendidas de las caracterizaciones de las normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, además de funciones de Lyapunov dependen-

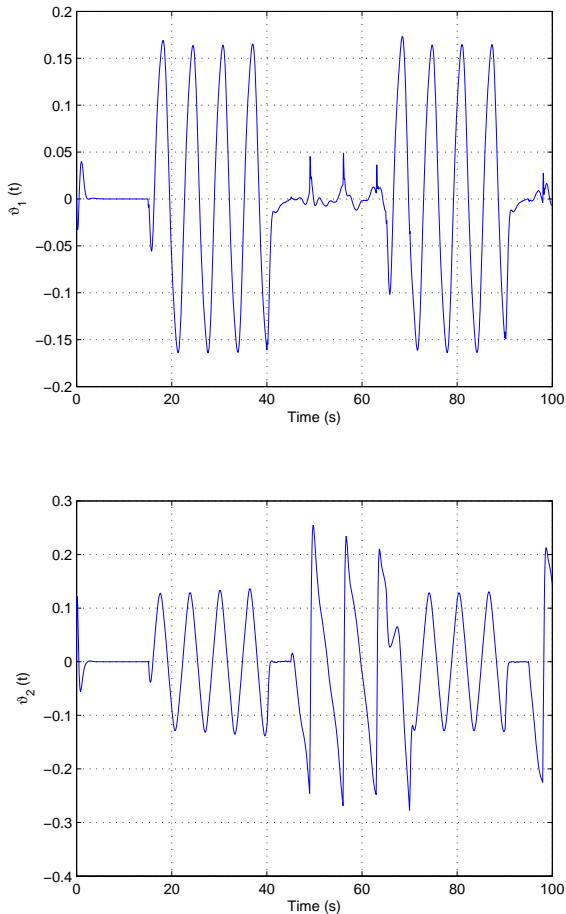


Figura 6. Señales ϑ .

tes de parámetros. La evaluación numérica ha permitido la verificación de los resultados teóricos, y el análisis de los residuos, conjuntamente con las señales desconocidas estimadas del PIO, favorecen el proceso de diagnóstico.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el CDCHTA de la Universidad de Los Andes, a través del proyecto No. I-1302-12-02-B, por lo que gratuitamente se reconoce este soporte.

REFERENCIAS

- [1] R. Beard, "Failure accommodation in linear systems through self-reorganization," Ph.D. dissertation, Mass. Inst. Technol., 1971.
- [2] H. Jones, "Failure detection in linear systems," Ph.D. dissertation, Mass. Inst. Technol., 1973.

- [3] E. Frisk and L. Nielsen, "Robust residual generation for diagnosis including a reference model for residual behavior," *Automatica*, vol. 42, no. 3, pp. 437–445, 2006.
- [4] M. L. Guillén, J. L. Paredes, and O. E. Camacho, "Detección y diagnóstico de fallas utilizando la transformada wavelet," *Ciencia e Ingeniería*, vol. 25, no. 1, pp. 35–42, 2004.
- [5] H. Niemann, J. Stoustrup, and B. Shafai, "Fault detection using PI observers," in *Proc. of CONTROL 97*, 1997.
- [6] B. Shafai, C. T. Pi, and S. Nork, "Robust fault detection using proportional integral observers," in *World Automation Congress*, 2002.
- [7] J. Zhang, "Evaluation of observer structures with application to fault detection," Master's thesis, Northeastern University, Dep. of Electrical and Computer Eng., 2009.
- [8] M. Rodrigues, D. Theilliol, S. Aberkane, and D. Sauter, "Fault tolerant control design for polytopic LPV systems," *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, vol. 17, no. 1, pp. 27–37, 2007.
- [9] A. Casavola, D. Famularo, G. Franzè, and M. Sorbara, "A fault detection, filter-design method for linear parameter-varying systems," *Proc IMechE. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 221, pp. 865–873, 2007, especial Issue on Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Control.
- [10] A. Weng, R. Patton, and P. Cui, "Active fault-tolerant control of a double inverted pendulum," *Proc IMechE. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 221, pp. 895–904, 2007, especial Issue on Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Control.
- [11] J. Bokor and G. Balas, "Detection filter design for LPV systems—a geometric approach," *Automatica*, vol. 40, pp. 511–518, 2004.
- [12] M.-A. Massoumnia, "A geometric approach to the synthesis of failure detection filters," *IEEE Trans. On Autom. Control*, vol. 31, no. 9, pp. 839–846, 1986.
- [13] J. Bokor and G. Balas, "Linear parameter varying systems: A geometric theory and applications," Comp. and Automation Research Institute, Hungary, Tech. Rep., 2005.
- [14] W. Acuña and A. Ríos-Bolívar, " $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ multiobjectives for fault detection in uncertain polytopic systems," in *Proc. of 17th IFAC World Congress*, vol. CD-Rom, Seoul, Korea, 2007, pp. We-290.

- [15] Z. Duan, J. Zhang, C. Zhang, and E. Mosca, "Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain linear systems," *Automatica*, vol. 42, pp. 1919–1926, 2006.
- [16] E. Mazars, J. I.M., Z. Li, and A. Zolotas, "Fault detection and isolation filter design for systems subject to polytopic uncertainties," in *Proc. of the IEEE 15th Mediterranean Conf. On Control and Autom.*, Athens, Greece, 2007, p. CDROM.
- [17] A. Casavola, D. Famularo, and Franzè, "A robust deconvolution scheme for fault detection and isolation of uncertain linear systems: an LMI approach," *Automatica*, vol. 41, pp. 1463–1472, 2005.
- [18] A. Ríos-Bolívar and W. Acuña, "Robust FDI in uncertain LTI systems: A multiobjective $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$ setting," *Int. J. of Electronics, Electrical and Communication Eng. (IJECE)*, vol. 2, no. 1, pp. 25–45, 2010.
- [19] A. Y. Ríos, "Un filtro para detección robusta de fallas en sistemas lineales a tiempo discreto con incertidumbres estructuradas," *Ciencia e Ingeniería*, vol. 28, no. 2, pp. 95–102, 2007.
- [20] A. Ríos-Bolívar, "On the design of PIO for LPV systems," *Revista Ciencia e Ingeniería (bajo consideración)*, 2014.
- [21] P. Apkarian, H. Tuan, and J. Bernussou, "Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and \mathcal{H}_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations," *IEEE Trans. on Autom. Control*, vol. 46, no. 12, pp. 1941–1946, 2001.
- [22] C. Wei, "On applications of the projection lemma to analysis and design of continuous-time systems," Master's thesis, National Sun Yat-Set University, 2003.
- [23] M. Oliveira, J. Bernussou, and J. Geromel, "A new discrete-time robust stability condition," *Systems & Control Letters*, vol. 37, pp. 261–265, 1999.
- [24] L. A. Morales, N. S. Sotomayor, and Y. Boada, "Control de seguimiento de trayectoria y paletización de un robot de tres grados de libertad tipo SCARA (selective compliance assembly robot arm)," *Revista Politécnica*, vol. 33, no. 1, pp. 1–9, 2014.
- [25] A. Ríos-Bolívar, "Sur la synthèse de filtres de détection de défaillances," Ph.D. dissertation, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2001.
- [26] G. Angelis, "System analysis, modelling and control with polytopic linear models," Ph.D. dissertation, Technische Universiteit Eindhoven, 2001.