La Argumentación en el proceso de Coordinación de las aprehensiones Operativas y Discursivas en Geometría

Cueva R.*

**Escuela Politécnica Nacional, Departamento de Formación Básica Quito, Ecuador*
*e-mail: ruth.cueva@epn.edu.*ec

Resumen: Este trabajo tiene como objetivo realizar un primer acercamiento al estudio del papel jugado por la argumentación en el proceso de coordinación de la aprehensión operativa y discursiva, a la luz de la teoría de Duval y desarrollada posteriormente por Torregrosa y colaboradores.

Palabras clave: Enseñanza, matemática, aprehensiones, visualización, razonamiento.

Abstract: This work aims to make a first approach to the study of the role of argumentation in the process of coordination of operational and discursive apprehension, in light of the theory of Duval and further developed by Torregrosa *et al*.

Keywords: Teaching, math, apprehensions, visualization, reasoning.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la Geometría en todos los niveles de enseñanza tiene gran importancia porque "se puede considerar como un instrumento reflexivo que le permite al ser humano resolver problemas de diversa índole y comprender un mundo que le ofrece una amplia gama de variadas formas geométricas, en cada uno de los escenarios que lo conforman, sea este natural o artificial" [1].

De acuerdo con McClure [2] la enseñanza de la Geometría Euclídea prepara al estudiante para un entrenamiento matemá tico más riguroso porque: trata con objetos familiares que pueden ser pensados tanto visual cono verbalmente; las declaraciones que se hacen sobre estos objetos son fácilmente comprensibles y con frecuencia contundentes; los métodos lógicos involucrados tienden a ser menos sutiles que las de otras partes introductorias de las matemáticas, implican un menor número de cuantificadores; es posible hacer un aprendizaje matemático serio en este tema sin tener un conocimiento perfecto de lo que son los sistemas axiomáticos y cuáles las reglas para trabajar con ellos.

Jones *et al* [3], está convencido de que la Geometría Euclídea en la enseñanza preuniversitaria es un buen lugar para aprender acerca de las demostraciones y las pruebas matemáticas porque: las demostraciones suelen ser cortas, solo requieren unos pocos conceptos, se apoyan en propiedades visuales y son bastantes formales en la estructura. Polya [4] escribió que si el estudiante no pudo familiarizarse con las demostraciones geométricas, entonces se perdió los mejores y más simples ejemplos de evidencia verdadera y se perdió la mejor oportunidad de adquirir la idea del razonamiento estricto.

A pesar de la gran importancia del aprendizaje de la demostración y del esfuerzo invertido en su enseñanza *(International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, the 19th ICMI Study, National Council of Teaching of Mathematics (2000)*) los resultados son decepcionantes:

Fishbein (1982, p.16), investigando sobre una muestra de 400 estudiantes de secundaria en Tel Aviv cómo distinguían entre demostración empírica y formal encontró que solo un 14.5 % de los estudiantes estudiados fueron capaces de aceptar una demostración desarrollada de acuerdo con razonamiento estrictamente lógico, sin necesidad de comprobaciones empíricas adicionales: *"**solo el 14.5 % fueron consistentes hasta el final (es decir, no sintieron la necesidad de posteriores comprobaciones empíricas)**"*.

Senk (1985), en un estudio realizado con 1520 estudiantes, que habían recibido enseñanzas sobre demostración en un curso de geometría, en 74 clases, de 11 escuelas, de 5 estados de EEUU, encontró que solo ***"…aproximadamente el 30 % de los estudiantes que habían seguido un curso año completo con enseñanza de la demostración alcanzaron un 75 % de nivel de maestría en demostraciones estrictas".***

Martin y Harel (1989), en una investigación sobre esquemas personales de demostración matemática, realizada con 101 alumnos de Magisterio, encontraron que ***"…más de la mitad de los estudiantes aceptaban un argumento empírico-inductivo como demostración matemática"*** [5].

Una de las causas en el fracaso de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración radica en la concepción de la demostración como producto y no como un proceso, lo que ha conllevado al estudiante a acometer la demostración matemática como una memorización de hechos y procedimientos.

Quizás a partir del artículo de Lakatos [6], los investigadores en didáctica de las matemáticas vieron una puerta hacia el aprendizaje de la demostración a través de los procesos de argumentación, explicación, justificación y elaboración de conjeturas ya que:

"*los matemáticos más a menudo encuentran la verdad por métodos que son intuitivos o empíricos por naturaleza. En la creación de las matemáticas se plantean los problemas, se analizan ejemplos, se hacen conjeturas, se ofrecen contraejemplos y se revisan las conjeturas; un teorema resulta cuando este refinamiento y validación de ideas responde a una pregunta importante*" [7].

Para nuestros propósitos definiremos la demostración como un argumento lógicamente correcto construido a partir de condiciones dadas, definiciones y teoremas dentro de un sistema axiomático y la prueba como el proceso de construcción o el intento de construir un argumento deductivo. La demostración es un tipo particular de argumento [8].

2. ARGUMENTO Y ARGUMENTACIÓN

Duval [9] hace referencia a la argumentación como medio para convencer, sea a uno mismo o a los otros. Plantea: Se considera como argumento todo aquello que se ofrece, o todo lo que es utilizado, para justificar o para refutar una proposición. Aquello puede ser el enunciado de un hecho, un resultado de la experiencia, a veces simplemente un ejemplo, una definición, el recuerdo de una regla, una creencia comúnmente compartida, o incluso la explicitación de una contradicción. Todas ellas toman valor de justificación cuando alguien las utiliza para decir porqué él acepta o rechaza una proposición. Más adelante en el mismo artículo: a propósito de la búsqueda de la solución de un problema, una simple pregunta puede tener valor o fuerza de argumento que impela a tomar distancia de una idea dada. La formulación de una conjetura con su consiguiente validación o no, puede tener fuerza de argumento porque nos puede acercar o alejar de una determinada idea.

Krummheuer citado por Vincent *et al* [10] considera un argumento, ya sea como una subestructura específica dentro de una argumentación compleja o el resultado de una argumentación; podemos distinguir entre la argumentación como un proceso y el argumento como un producto. La argumentación se refiere tradicionalmente a un individuo convenciendo a un grupo de oyentes, pero también puede ser un proceso interno llevado a cabo por un individuo.

Un argumento puede ser definido como una secuencia de enunciados matemáticos que pretenden convencer, mientras que la argumentación puede ser considerada como un proceso en el que un discurso matemático lógicamente conectado se desarrolla [10].

Investigadores como Garuti *et al* [11], otorgan gran importancia a los procesos de argumentación y formulación de conjeturas en el aprendizaje de la demostración matemática y han hallado evidencias experimentales de la unidad cognitiva (CU: *cognitive unity*) que existe entre las fases de producción de conjeturas y de la construcción de la demostración. Se refieren a esta unidad en los términos siguientes:

(CU): Durante la producción de la conjetura, el estudiante trabaja progresivamente sus declaraciones a través de una actividad argumentativa intensa, funcionalmente entremezclada con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones. Durante las posteriores declaraciones de la actividad demostrativa, el estudiante se vincula con este proceso de una manera coherente, organizando algunas de las justificaciones (argumentos) producida de acuerdo con una cadena lógica.

Interpretando la prueba o demostración matemática como un proceso (en el cual la lógica juega un papel importante) y no como un producto final, nos adscribimos al pensamiento de Toulmin [12]:

"*For logic is concerned not with the manner of our inferring, or with questions of technique: its primary business is e retrospective one with the arguments we can put forward afterwards to make good our claim that the conclusions arrived at are acceptable, because justifiable, conclusions*".

2.1 Estructura de un argumento: modelo de Toulmin

Cuando afirmamos, enunciamos o concluimos algo [*Claim*] lo hacemos basados en datos [*Data*]. Pero la respuesta a la pregunta ¿cómo hemos llegado a nuestra afirmación, qué justifica el paso de los datos a la conclusión? debe ser dada haciéndose explícitas las reglas, principios e inferencias que nos permitieron dar el paso. Debemos dar garantías [*Warrants*] de la plausibilidad de nuestra enunciación. Es posible que nuestros datos, en virtud de las garantías, no sean suficientes o necesarios para nuestro enunciado o afirmación; esto indica que debemos tener en cuenta la calidad o Cualificación [*Qualifiers*] de ellos y pueden existir elementos o condiciones que refuten nuestra conclusión [*Rebuttal*]. Es posible que la fiabilidad y calidad de nuestros datos y garantías sea incuestionable, así como la no existencia de un elemento refutador y de todas formas no sean suficientes para arribar (sin dudas) a la afirmación; en ese caso debemos hacer aún más explícitas y claras nuestras garantías, darle más sustento o apoyo [*Backing*]. Las ideas anteriormente expuestas se pueden representar mediante un esquema (Fig. 1)

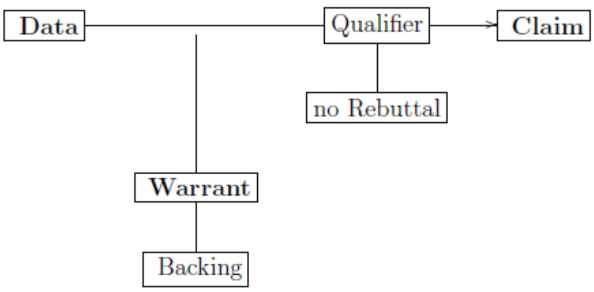

Figura 1. Diagrama de Toulmin

3. VISUALIZACIÓN, APREHENSIONES Y COORDINACIÓN

Desde el punto de vista psicológico, a la visión como percepción, Duval [9a] le asocia dos funciones: la primera denominada *función epistemológica* y relacionada con el acceso directo cualquier objeto físico y la segunda, *función sinóptica*, interpretada como la aprehensión simultánea de varios objetos o un determinado campo completo. La visualización es la visión manifestada en la función sinóptica.
La percepción visual (*función epistemológica*) necesita de la exploración física, no puede aprehender el objeto de una vez, como un todo. Por el contrario la visualización, puede tener una completa aprehensión "instantánea" de cualquier organización de relaciones.

Al resolver problemas de geometría constantemente estamos interactuando con figuras y para que estas se constituyan en un objeto matemático deben: ser una conjunción de varias gestalts con relación entre ellas que caractericen lo que estamos observando (una configuración) y estar unida (anclada) a una proposición (matemática) que fije algunas propiedades representadas por la gestalt (hipótesis). Siguiendo a Duval, de estas condiciones se desprenden dos maneras de aprehender una figura: aprehensión perceptual y aprehensión discursiva.

La aprehensión perceptiva se caracteriza como la identificación simple de una configuración y la discursiva como la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas [13].

En el proceso de resolución de los problemas geométricos interactuamos con las figuras, realizando cambios en la configuración original. Estos cambios son manifestaciones de la *aprehensión operativa*, que puede ser de dos tipos: cuando se añaden nuevos elementos geométricos *(aprehensión operativa de cambio figural)* y cuando las subconfiguraciones componentes se manipulan como las piezas de un puzzle (*aprehensión operativa de reconfiguración).* Después de cada cambio pueden hacerse visibles nuevas propiedades que podemos asociar a definiciones, axiomas, teoremas (*aprehensión discursiva*) después de este análisis pueden hacerse nuevos cambios en la configuración obtenida previamente (*aprehensión operativa*) repitiéndose el ciclo aprehensión discursiva/aprehensión operativa de manera coordinada hasta que se alcanza la solución o se abandona la estrategia seguida [13].

Creemos que los procesos (entendidos como el conjunto de acciones de un tipo u otro) de aprehensiones operativas y discursivas pueden ser no homogéneos, que pueden albergar dentro de ellos acciones de argumentación que sirvan de eslabones entre una acción y otra del proceso operatorio; o entre una acción y otra del proceso aprehensivo discursivo. También la argumentación puede servir de puente en el paso de un subproceso de aprehensiones operativas a un subproceso de aprehensiones discursivas y viceversa. Estos eslabones pueden dar lugar a la "idea feliz" o a la "iluminación" que conduzcan a la solución del problema en cuestión.

Veamos un ejemplo ilustrativo.

4. EJEMPLO

Problema

En los lados AB y BC del triángulo ABC se han construido los cuadrados ABDE y BCKM fuera de él. Pruebe que el segmento DM es dos veces mayor que la mediana BP del triángulo ABC (Fig. 2)
.

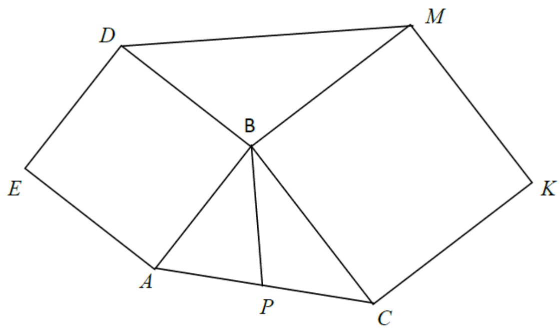

Figura 2. Figura original

Protocolo de resolución

1. El hecho de observar la figura (aprehensión perceptiva)

2. Identificación del triángulo ABC, los cuadrados ABDE y BCKM por congruencia semántica con el enunciado del problema (aprehensión operativa y discursiva).

3. Identificación del segmento DM por congruencia semántica (aprehensión operativa).

4. Identificación de la mediana BP por congruencia semántica (aprehensión operativa).

5. Reconocimiento de la igualdad de los segmentos AP y PC (aprehensión discursiva).

6. Identificación del triángulo BDM (aprehensión operativa y discursiva).

Hemos llegado a un punto donde hacen falta nuevas acciones de aprehensiones operativas y discursivas y es aquí donde entran en juego elementos de la argumentación como pregunta respuesta o como validación/no validación de una conjetura.

Posible línea de pensamiento

Es necesario probar que DM=2BP. Si prolongo BP (8. aprehensión operativa) hasta el doble "¿qué obtengo?" (Fig. 3)

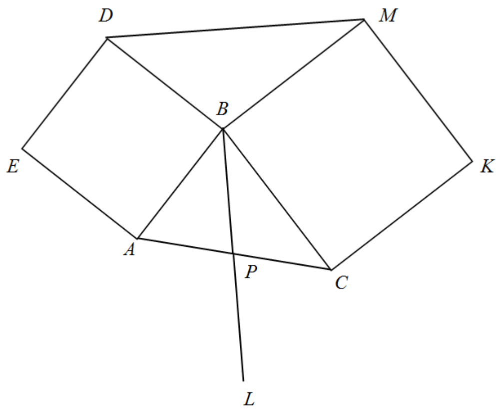

Figura 3. Primera construcción

Los segmentos AC y BL se cortan por la mitad, entonces puedo construir un paralelogramo usándolos como diagonales (9. aprehensión discursiva y operativa) (Fig. 4)

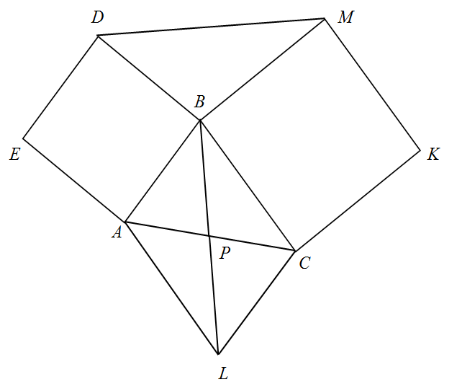

Figura 4. Segunda construcción

Identificación de los triángulos BDM y ABL (subconfiguraciones relevantes), (10. aprehensión operativa) ¿Serán iguales los triángulos BDM y ABL? (pregunta/conjetura).

El lado AL es paralelo e igual al lado BC (11. aprehensión discursiva) por tanto puedo trasladar (12. aprehensión operativa de reconfiguración) el cuadrado BCKM sobre el lado AL. (Fig. 5)

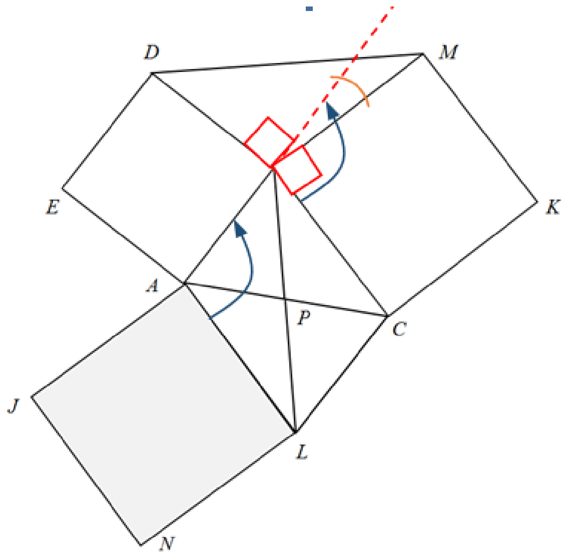

Figura 5. Tercera construcción

La subconfiguración: cuadrado ABDE-triángulo BDM-cuadrado BCKM, es "idéntica" a la subconfiguración: ABDE-triángulo ABL-cuadrado ALNJ; por tanto los triángulos BDM y ABL son iguales (congruentes) por tener sus lados iguales uno a uno (LLL) y como PB = (1/2) BL y BL = DM, entonces BP = (1/2)DM (12. aprehensión discursiva)

4.1 Diagrama de Toulmin aplicado a la resolución del problema

En aras de la simplicidad, usaremos un modelo sencillo que no contenga *Qualifiers* ni *Rebuttal.* (Fig. 6)

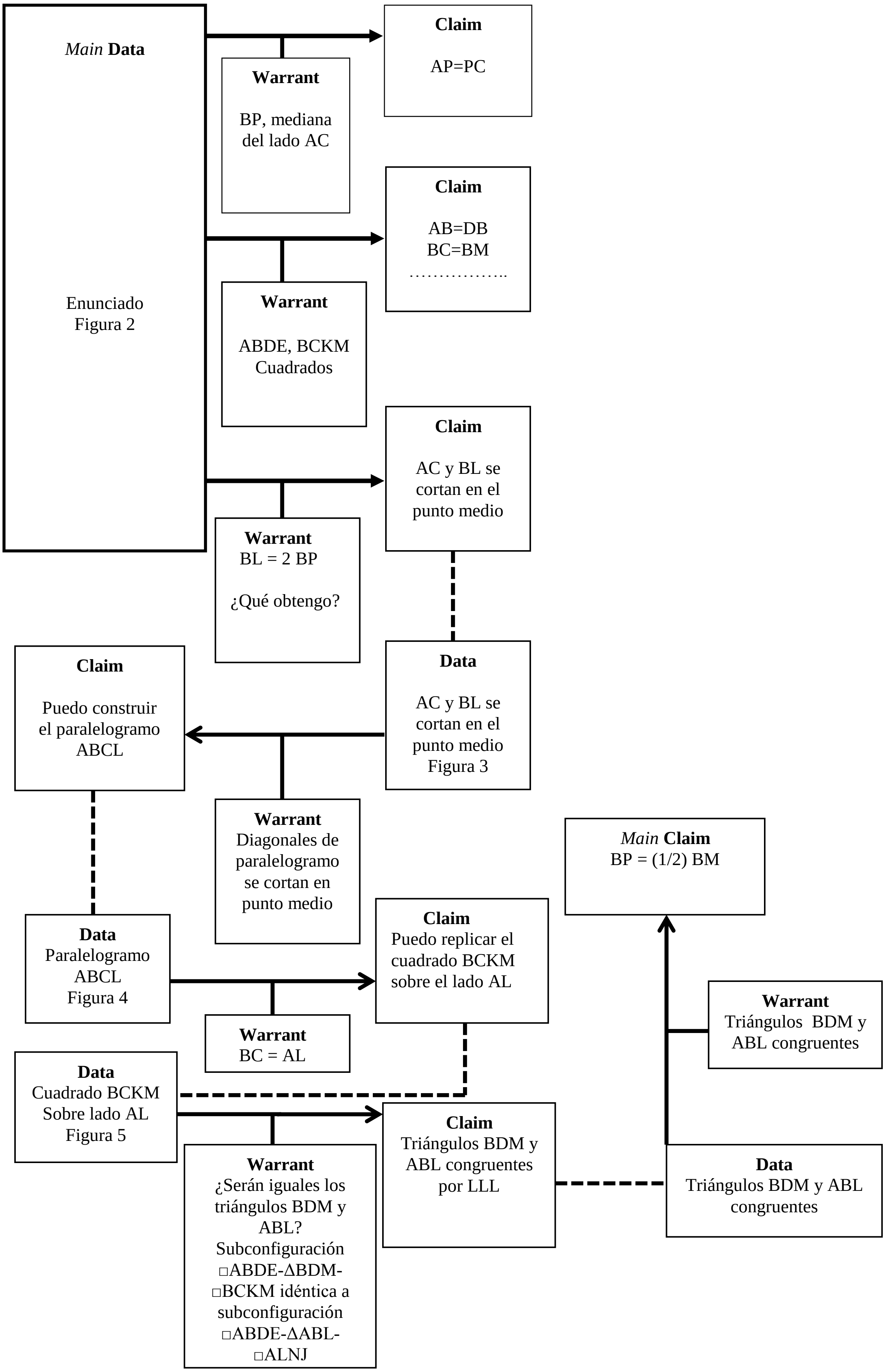

Figura 6. Diagrama de Toulmin aplicado

5. CONCLUSIONES

Hemos desarrollado un protocolo donde se muestran las aprehensiones en el proceso de resolución de un problema de geometría tomado de ejemplo. Posteriormente hemos desarrollado un diagrama de Toulmin donde se muestran los argumentos (posibles) encadenados lógicamente hasta llegar a la solución. Aunque no de manera explícita, el diagrama también recoge las aprehensiones, entendiendo la prueba o demostración matemática como un proceso en el que se realizan acciones donde algunas de ellas no resultarán necesarias para la culminación exitosa, pero no superfluas (primeros dos argumentos en el diagrama de Toulmin aplicado). El tercer argumento (*Main* **Data**, **Warrant**: BL=2BP ¿Qué obtengo? Claim: AC y BL se cortan en el punto medio) nos ha llevado hasta la solución y podemos atisbar cierta unidad cognitiva en el proceso de argumentación y la prueba, gracias a este argumento en particular.

REFERENCIAS

[1] R. Gamboa and E. A. Ballestero, "Algunas reflexiones sobe la didáctica de la geometría," *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, no.5, pp.113-136, 2009.

[2] J. E. McClure, "Start where they are: Geometry as an introduction to proof," *American Mathematical Monthly*, no.107, vol.1, pp.44-52, 2000.

[3] K. Jones and M. Rodd, "Geometry and proof," *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, no. 21, vol.1, pp.95-100, 2001.

[4] G, Polya. *How to solve it*. Princeton University. 1957

[5] Martínez, R. A. "La demostración en matemáticas," en *Una aproximación epistemológica y didáctica*, en Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación matemática, Almería, España, 2001

[6] I. Lakatos, "Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery," New York: Cambridge University Press, 1976.

[7] M. T. Battista and D. H. Clements, "Geometry and proof," *Mathematics Teacher*, no.88, vol.1, pp. 48-54, 1995.

[8] A. M. Conner, "Student Teachers' Conceptions of Proof and Facilitation of Argumentation in Secondary Mathematics Classrooms," Tesis Doctoral, Pennsylvania: The Pennsylvania State University, 2007

[9] Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112 ThemeES.html
a. Duval, R, "Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning," en *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cuernavaca, Morelos, México. 1999.

[10] J, Vincent *et al*., "Argumentation profile charts as tools for analising students' argumentations," en *Proceeding of the 29th Conference of the International Group for the psychology of mathematics education*, no.4, pp. 281-288, Melbourne: PME, Australia, 2005.

[11] R. Garuti *et al*., (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. http://www.mat.ufrgs.br/portosil/garuti.html

[12] S, E, Toulmin. *The uses of arguments*. Cambridge University Press. 2003

[13] G. Torregrosa and H. Quesada, "Coordinación de procesos cognitivos en geometría," *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, no. 10, vol. 2, pp.275-300, 2007.

.