

# Propagación de Incertidumbre en los Patrones de Vibración de Vigas Rotantes

Piovan M.\*; Olmedo F.\*\*

\*Universidad Tecnológica Nacional- Facultad Regional Bahía Blanca, Facultad de Ingeniería Mecánica, Bahía Blanca, Argentina

e-mail: mpiovan@frbb.utn.edu.ar

\*\* Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE, Departamento de Energía y Mecánica, Sangolquí, Ecuador

e-mail: jfolmedo@espe.edu.ec

---

**Resumen:** En este artículo se efectúan estudios de la propagación de incertidumbre para caracterizar la variabilidad de respuesta dinámica de vigas rotantes o álabes en cuanto a sus patrones de vibración libre. Se emplea un modelo básico de viga rotante con flexibilidad por corte (modelo Timoshenko extendido) el cual sirve como modelo determinístico básico para los posteriores cálculos probabilísticos. En un sistema rotante la incertidumbre se debe a múltiples factores: solicitaciones, materiales, formas de anclaje, etc. El estudio probabilístico que se conduce evaluando como inciertos algunos parámetros del modelo matemático, como por ejemplo, las propiedades del material, el ángulo de conexión de la viga al núcleo rotante, entre otros. Se emplea el Principio de Máxima Entropía para deducir las funciones de distribución de probabilidades asociadas a los parámetros. Luego se construye el modelo probabilístico sustentado dentro de una plataforma general de cálculo computacional por el método de elementos finitos. Se llevan a cabo cálculos de propagación de incertidumbre en la dinámica de vigas rotantes. Y se observa que la variabilidad en la rigidez del anclaje no afecta sustancialmente la dispersión de las frecuencias, mientras que la variabilidad de las propiedades materiales afecta en el mismo orden las respuestas de frecuencia

**Palabras clave:** Vigas rotantes; Modelación probabilística; Método Monte Carlo.

**Abstract:** In this article, studies of the uncertainty propagation are performed to characterize the variability of dynamic response of beams or rotating blades in their free vibration patterns. A basic model of rotating flexible beam shear (extended Timoshenko model) which serves as a basic deterministic model for subsequent probabilistic calculations is used. In a rotating system, uncertainty is due to many factors: stresses, materials, shape anchor, etc. The probabilistic study is evaluating driving uncertain as some parameters of the mathematical model, such as material properties, connection angle of the beam at the rotating core, and others. Maximum Entropy Principle to derive the probability distribution functions associated with the parameters is used. The probabilistic model based within a general computing platform calculation by finite element method is then built. Calculations are performed propagation of uncertainty in the dynamics of rotating beams.

**Keywords:** Rotating beams; probabilistic modeling; Monte Carlo method.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los modelos de vigas rotantes cumplen un rol importante para el análisis preliminar de varias aplicaciones ingenieriles tales como álabes de turbinas, brazos robóticos, actuadores mecánicos, etc. El desarrollo de este tipo de modelos, entre elementales y complejos se ha extendido desde la mitad del siglo pasado hasta hoy [1]. En el caso de vigas rotantes esbeltas, se debe destacar que los efectos geométricos junto con los efectos inerciales son de fundamental importancia en la modelación de la respuesta dinámica [2].

Para poder mejorar la predictibilidad de los modelos estructurales se han introducido varios y diferentes tipos de

hipótesis de comportamiento mecánico en la formulación matemática de aquellos, al menos dentro del contexto determinístico [2,3]. Sin embargo hay muchos parámetros involucrados en las ecuaciones, tales como: módulos de elasticidad, densidad, fuerzas, geometría entre otros; que están sujetos a incertidumbre debido a aspectos de producción, operación del sistema, recepción de materiales, etc. Bajo este contexto es necesario cuantificar los efectos posibles de la propagación de incertidumbre en la dinámica de tales estructuras. En los trabajos de Fazelzadeh y colaboradores [4,5] se evalúan diversos aspectos de la dinámica de vigas rotantes construidas con materiales funcionales cerámico/metálicos, pero empleando enfoques determinísticos. Por otro lado, existen algunos trabajos donde se han efectuado estudios básicos en cuanto al

comportamiento probabilístico de estructuras rotantes, involucrando incertidumbre en las cargas axiales [7], o bien en algunos parámetros asociados a las propiedades elásticas de los materiales funcionales [6]. El propósito de este trabajo es analizar la dinámica de vigas rotantes teniendo en cuenta la incertidumbre asociada a diversos aspectos de la modelación. Por lo que se emplea un modelo linealizado de viga rotante basada en la teoría de corte de primer orden de Timoshenko, ampliada para contemplar también el movimiento extensional. Este modelo matemático se emplea como el modelo determinístico que aporta, bajo hipótesis, la base formal para construir el modelo estocástico o probabilístico [8]. La incertidumbre en el modelo matemático se incorpora a través de ciertos parámetros materiales (densidad y módulos de elasticidad) y constructivos como el ángulo de anclaje.

A cada uno de los parámetros inciertos se le asigna una variable aleatoria que se haya sujeta a conocer cierta información “a priori”, como por ejemplo el valor medio o expectativa y/o región de variación y/o variancias o coeficientes de variación. Para deducir las funciones de densidad de las variables aleatorias se emplea el Principio de Máxima Entropía [9]. Las ecuaciones del modelo se plantean dentro de una plataforma general de cálculo del método de elementos finitos a modo de rutina. Luego se emplea la técnica de Monte Carlo programada en el entorno Matlab y combinada a la rutina anterior, para efectuar las realizaciones que corresponden según la convergencia deseada.

Finalmente se procede a evaluar la respuesta estocástica mediante una serie de herramientas de análisis estadístico: histogramas en los rangos de frecuencias naturales y evaluación de las diferencias porcentuales en la dispersión con respecto a los coeficientes de variación y evaluación de las diferencias porcentuales en la dispersión con respecto a los coeficientes de variación.

## 2. FORMULACIÓN DEL MODELO DETERMINÍSTICO

### 2.1 Hipótesis básicas y cinemática

El modelo matemático para este estudio se basa en la teoría de Timoshenko para una viga rotante, empleando un modelo previamente desarrollado por el primer autor [10] y que en este trabajo se linealiza [2,11] para evaluar solamente los aspectos de vibraciones libres. En la Fig. 1 se muestra un esquema del sistema rotante que consta de una viga con flexibilidad por corte a flexión y además movimiento extensional. La viga, de longitud  $L$ , se halla empotrada a un núcleo cilíndrico de radio  $R_0$ , en el punto  $A$ .

El eje de la viga se halla orientado un ángulo  $\theta$  con respecto a un eje de dirección radial que sale del mismo punto de anclaje. El núcleo está rotando a una velocidad de rotación  $\Omega$  con respecto al eje del núcleo. Se definen tres sistemas de referencia:  $\{O: X_G, Y_G, Z_G\}$ ,  $\{O: X_R, Y_R, Z_R\}$  y  $\{A:x,y,z\}$ , que son el sistema inercial fijo, rotante e intrínseco de la viga, respectivamente. Para este estudio se considera solamente el movimiento confinado en el plano de rotación.

El vector posición de un punto cualquiera de la viga medido en  $\{O: X_G, Y_G, Z_G\}$ , luego de la deformación se puede expresar de la siguiente manera:

$$\bar{U} = [R_0 + (x+u-y\phi)\cos\theta - (v+y)\sin\theta]\hat{X}_G + [(x+u-y\phi)\sin\theta + (v+y)\cos\theta]\hat{Y}_G \quad (1)$$

En la Ec. (1),  $u \equiv u(x, t)$ ,  $v \equiv v(x, t)$  y  $\phi \equiv \phi(x, t)$  son las variables cinemáticas del punto de la viga medidos con respecto al baricentro de la sección de la viga. En efecto,  $u$  y  $v$  se identifican a los desplazamientos del baricentro de la sección, mientras que  $\phi$  representa la rotación de la sección.

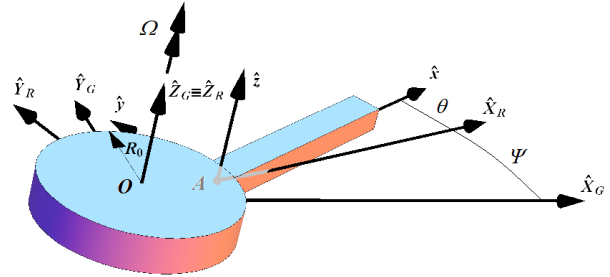


Figura 1. Esquema de una viga rotante

El vector velocidad del punto se expresa como sigue:

$$\dot{\bar{U}} = \left[ \begin{aligned} &[(\dot{u}-y\dot{\phi})\cos\theta - \dot{v}\sin\theta]\hat{X}_G \\ &+ [(\dot{u}-y\dot{\phi})\sin\theta + \dot{v}\cos\theta]\hat{Y}_G \\ &- \Omega[(x+u-y\phi)\sin\theta - (v+y)\cos\theta]\hat{X}_G \\ &+ \Omega[R_0 + (x+u-y\phi)\cos\theta - (v+y)\sin\theta]\hat{Y}_G \end{aligned} \right] \quad (2)$$

Los puntos sobre las variables identifican derivación temporal. La velocidad de rotación del núcleo es  $\Omega$  y se puede calcular como la derivada temporal del ángulo  $\Psi$ . Por otro lado, las componentes de deformación en la viga se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u' - y\phi' + \frac{1}{2}(v')^2 \\ 2\varepsilon_{xy} &= v' - \phi \end{aligned} \quad (3)$$

En la Ec. (3), los apóstrofes identifican derivación con respecto a la variable espacial  $x$ . Además, nótese que la Ec. (3) posee un término no lineal en la componente de deformación axial. La inclusión de este término es necesaria para poder contabilizar apropiadamente la rigidización en el movimiento flexional debida al efecto centrífugo axial [2, 10,11].

### 2.2 Deducción del modelo estructural

Las ecuaciones de movimiento se pueden obtener por la minimización del siguiente funcional:

$$H = \delta \int_{t_1}^{t_2} (E_C - E_D) dt = 0 \quad (4)$$

Donde el símbolo  $\delta$  identifica al operador variacional, mientras que  $E_C$  y  $E_D$  son la energía cinética y la energía de deformación respectivamente, que se expresan como sigue:

$$E_C = \int_V \rho \left( \dot{\bar{U}} \cdot \dot{\bar{U}} \right) dV$$

$$E_D = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_{xx}^2 dV + \frac{1}{2} \int_V k G \gamma_{xy}^2 dV \quad (5)$$

En la Ec. (5),  $V$  indica variable y dominio en el volumen. Así que, operando variacionalmente en la Ec. (4) se tiene la siguiente expresión de modelo matemático para una viga Timoshenko rotante:

$$J_{11} u'' - J_{11} \ddot{u} + J_{11} \Omega^2 u + 2J_{11} \rho \Omega \dot{v} + J_{11} \Omega^2 (x + R_0 \cos \theta) = 0$$

$$J_{33} (v'' - \phi') - J_{11} \ddot{v} + N_p v' + N_p v'' + J_{11} \Omega^2 v - 2J_{11} \rho \Omega \dot{u} = 0 \quad (6)$$

$$J_{22} \phi'' + J_{33} (v' - \phi) - J_{22} \dot{\phi} + J_{22} \Omega^2 \phi = 0$$

En la expresión anterior se ha recurrido al concepto de linealización consistente de la teoría de vigas [2,11]. Además con  $N_p$  se identifica la fuerza axial para un estado de deformación axial estacionario. Las ecuaciones anteriores se hallan sujetas a las siguientes condiciones de borde:

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=0 \\ \phi = \tan \theta \end{cases}, x=L \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ (v' - \phi) = 0 \\ \phi' = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Las constantes de las expresiones previas se calculan de la siguiente manera:

$$\{J_{11}, J_{22}, J_{33}\} = \int_S \{E, E y^2, k G\} dS$$

$$\{J_{11}^{\rho}, J_{22}^{\rho}\} = \int_S \{\rho, \rho y^2\} dS \quad (8)$$

Las primeras tres son constantes elásticas seccionales, mientras que las otras dos son constantes inerciales de la sección. En la Ec. (8),  $S$  indica variable y dominio en la sección.

### 2.3 Ecuación dinámica del modelo determinístico

La Ec. (6) permite calcular diversas facetas del problema dinámico de vigas rotantes, aun así en este trabajo se pretende efectuar el estudio sobre vibraciones libres, para lo cual no es necesario evaluar toda la complejidad de las mismas y en cambio descomponer el sistema en dos partes empleando la siguiente transformación para las variables cinemáticas:

$$u = u_e + u_d, v = v_e + v_d, \phi = \phi_e + \phi_d \quad (9)$$

Siendo que los subíndices ‘e’ y ‘d’ identifican componentes estática y dinámica, respectivamente, de las variables cinemáticas. En consecuencia substituyendo Ec. (9) en la Ec. (6) se obtiene dos subsistemas que serán las ecuaciones de equilibrio estático y dinámico, respectivamente, los cuales no se describen por razones de espacio. Para calcular los

autovalores dinámicos o frecuencias naturales se requiere solamente de las ecuaciones diferenciales vinculadas a las variables cinemáticas dinámicas. Otro aspecto de utilidad es la adimensionalización del problema, el cual se logra mediante la siguiente transformación:

$$\bar{u} = u_d / L, \bar{v} = v_d / L, \bar{\phi} = \phi_d, \xi = x / L \quad (10)$$

En consecuencia, empleando la Ec. (9), asumiendo movimiento armónico con frecuencia  $\omega$ , y la Ec. (10) en la Ec. (6), extrayendo el subsistema dinámico y manipulando algebraicamente se llega al siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales adimensionales:

$$L_x^2 \bar{u}'' + (\Lambda^2 + \alpha^2) \bar{u} + 2i\Lambda \alpha \bar{v} = 0$$

$$k_s L_x^2 (\bar{v}'' - \bar{\phi}') + \bar{N}_p \bar{v}' + \bar{N}_p \bar{v}'' + (\Lambda^2 + \alpha^2) \bar{v} - 2i\Lambda \alpha \bar{u} = 0 \quad (11)$$

$$L_x^2 \bar{\phi}'' + k_s L_x^4 (\bar{v} - \bar{\phi}) + (\Lambda^2 + \alpha^2) \bar{\phi} = 0$$

Las cuales están sujetas a las siguientes condiciones de borde:

$$\xi=0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{u}=0 \\ \bar{v}=0, \xi=1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{u}'=0 \\ (\bar{v}' - \bar{\phi}')=0 \\ \bar{\phi}=0 \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

Los términos subrayados en la Ec. (11) corresponden al efecto giroscópico o efecto Coriolis, que en caso de tratarse de velocidades de rotación más bien bajas, su influencia se puede despreciar. La fuerza de rigidización centrífuga, en forma adimensional, se define como:

$$\bar{N}_p = -\frac{\mu}{\lambda} \cos \theta \sin \lambda \xi + \frac{\cos \lambda \xi}{\lambda^2 \cos \lambda} + \frac{\tan \lambda \cos \lambda \xi}{\lambda} \mu \cos \theta - \frac{1}{\lambda^2} \quad (13)$$

Además se han definido las siguientes entidades adimensionales:

$$\Lambda = \omega L^2 \sqrt{\frac{J_{11}^{\rho}}{J_{22}}}, L_x = L \sqrt{\frac{J_{11}^{\rho}}{J_{22}}}, \alpha = \Omega L^2 \sqrt{\frac{J_{11}^{\rho}}{J_{22}}}, \quad (14)$$

$$\mu = \frac{R_0}{L}, k_s = \frac{kG}{E}, \lambda = \Omega L \sqrt{\frac{J_{11}^{\rho}}{J_{11}}}$$

### 2.4 Modelo de elementos finitos

Se emplea una plataforma general del método de elementos finitos [12] donde se programa y resuelve el problema de autovalores que se desprende de la Ec. (11), sujeto a las siguientes restricciones: (a) no se contabiliza la fuerza giroscópica o de Coriolis, (b) en razón de (a) no se utilizaran parámetros de velocidad de rotación muy altos (i.e.  $\alpha \leq 0.2$ ). La plataforma de elementos finitos mencionada, permite la descripción del problema empleando la formulación matemática en la forma de ecuaciones diferenciales, para

luego proceder a discretizar el modelo mediante una proyección tipo Galerkin [12].

Así pues, bajo las restricciones fijadas en el párrafo anterior, las ecuaciones a resolver serán:

$$\begin{aligned} L_x^2 \bar{u}'' + (\Lambda^2 + \alpha^2) \bar{u} &= 0 \\ k_s L_x^2 (\bar{v}'' - \bar{\phi}') + \bar{N}_p' \bar{v}' + \bar{N}_p \bar{v}'' + (\Lambda^2 + \alpha^2) \bar{v} &= 0 \\ L_x^2 \bar{\phi}'' + k_s L_x^4 (\bar{v}' - \bar{\phi}) + (\Lambda^2 + \alpha^2) \bar{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

En la Ec. (15) el parámetro L corresponde al autovalor del problema, que es la respuesta que se quiere hallar

### 3. FORMULACIÓN DEL MODELO PROBABILÍSTICO

En esta sección se formula el modelo probabilístico empleando como base formal al modelo determinístico del apartado anterior, aceptando que el mismo da la respuesta media. Para ello se recurre al denominado Enfoque Probabilístico Paramétrico tomando algunos los parámetros de las Ec. (8), (13) y (14) como variables aleatorias. Las funciones de distribución de probabilidades de las variables aleatorias se deducen empleando el Principio de Máxima Entropía [8, 9, 10] apelando a la información disponible sobre los parámetros inciertos.

Se procede por tanto a asumir como inciertos los coeficientes de propiedades elásticas e inerciales de la Ec. (8) y el ángulo de anclaje de la viga al núcleo. De manera que para cada uno de los parámetros del modelo se definen variables aleatorias caracterizadas por su valor medio y varianza o coeficiente de variación. Las variables aleatorias  $V_1, V_2$  y  $V_3$  representarán a los parámetros  $\theta, E, \rho$ . Se considera que las variables aleatorias son independientes, que se conoce la expectativa o momento de primer orden (coincidente con el valor correspondiente valor determinístico) y que las mismas están confinadas por valores finitos y reales. En estas circunstancias y empleando el Principio de Máxima Entropía [9] se puede escribir la función de densidad de probabilidades de cada una de las variables aleatorias como sigue:

$$p_{V_i}(v_i) = 1_{[L_{V_i}, U_{V_i}]}(v_i) \frac{1}{U_{V_i} - L_{V_i}}, i=1,2,\dots \quad (16)$$

En la cual  $[L_{V_i}, U_{V_i}]$  es la denominada función de soporte unitario de la variable aleatoria  $V_i$ .  $L_{V_i}$  y  $U_{V_i}$  son los límites inferior y superior de la variable aleatoria  $i$ -ésima, fuera de ellos la distribución es nula. Incorporando las distribuciones aleatorias dadas por la Ec. (16) en la Ec. (15) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} L_x^2 \bar{u}'' + (\Lambda^2 + \alpha^2) \bar{u} &= 0 \\ k_s L_x^2 (\bar{v}'' - \bar{\phi}') + \bar{N}_p' \bar{v}' + \bar{N}_p \bar{v}'' + (\Lambda^2 + \alpha^2) \bar{v} &= 0 \\ L_x^2 \bar{\phi}'' + k_s L_x^4 (\bar{v}' - \bar{\phi}) + (\Lambda^2 + \alpha^2) \bar{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Las letras en negritas identifican a todas las entidades inciertas. En efecto, los parámetros de la Ec. (14) son inciertos

por la incertidumbre en  $E$  y en  $\rho$  y a través de la Ec. (8). En consecuencia las respuestas de las variables cinemáticas también serán todas aleatorias.

Para generar las muestras aleatorias de cada uno de los parámetros, se usa las siguientes funciones de Matlab, “unifrnd ( $V_{im}-\Delta, V_{im}+\Delta$ )” para la variable  $V_1$ , o bien la “unifrnd ( $V_{im}(1-\delta_i\sqrt{3}), V_{im}(1+\delta_i\sqrt{3})$ )”, para las variables  $V_2$  y  $V_3$ , siendo  $V_{im}$  la expectativa de la variable aleatoria  $i$ -ésima. Luego se emplea el método de Monte Carlo para efectuar las realizaciones independientes y emplean los datos calculados para efectuar el correspondiente análisis estadístico

## 4. EJEMPLOS COMPUTACIONALES

### 4.1 Comparaciones previas

El primer estudio corresponde a una comparación entre los resultados obtenidos con el presente modelo determinístico calculado mediante el método de elementos finitos y los resultados de un modelo homónimo [11] pero empleando series de potencias. Así pues en la Tabla I se pueden ver la comparación de los coeficientes de frecuencia  $a$ , contrastados con los homónimos del artículo de Lee y Sheu [12]. En tales cálculo se han empleado los parámetros:  $L_x = 20, k_s = 0.32693, \theta = 0$ .

**Tabla 1:** Valores de los parámetros, modelo determinístico

Coef. de frecuencia	Modelo para $\lambda=0$		Modelo para $\lambda=0.05$	
	presente	Lee [11]	presente	Lee [11]
$\Lambda_1$	3.436	3.436	3.460	3.454
$\Lambda_2$	19.139	19.139	19.266	19.259
$\Lambda_3$	31.416	31.416	31.400	31.466
$\Lambda_4$	46.751	46.751	46.910	46.906
$\Lambda_5$	79.240	79.240	79.435	79.431

Se puede notar de la Tabla 1 que la correspondencia entre las dos respuestas determinísticas es casi perfecta con leves diferencias del orden de menos de 0.2 %. Con esto es posible apreciar y aceptar como buena la representatividad del modelo empleado en este trabajo, en tanto que correlaciona muy bien con otros enfoques.

### 4.2 Propagación de Incertidumbre asociada al anclaje

En primera instancia se efectúa un estudio de la propagación de incertidumbre en la respuesta de vibraciones, asociada a la incertidumbre en el ángulo de anclaje  $\theta$ . Para ello se emplea solamente la variable aleatoria  $V_1$  y se efectúan simulaciones empleando el generador de números aleatorios “unifrnd ( $V_{im}-\Delta, V_{im}+\Delta$ )”, siendo  $\Delta$  un parámetro de dispersión máxima. Se emplearán tres grados de incertidumbre asociada a posibles errores de montaje con  $\Delta=0.01$  a  $\Delta=0.03$  (lo que implica errores menores a 2° sexagesimales). La estructura es tal que los parámetros para cargar el modelo determinístico son:  $L_x = 20, k_s = 0.32693, \lambda=1/7$  y  $\alpha=5$ .

En el proceso de simulación por el método de Monte Carlo se han empleado 400 realizaciones de la variable aleatoria  $V_1$ , manteniendo fijos en sus valores determinístico a las variables aleatorias  $V_2$  y  $V_3$ , es decir  $V_2=1/7$  y  $V_3=5$ .

En la Fig. 2 se muestra un histograma correspondiente a la respuesta del primer coeficiente de frecuencia, con  $\Delta=0.01$ , a su vez se indica el valor de la respuesta determinística. En la Fig. 3 se hace lo propio pero con  $\Delta=0.05$ . Las respuestas estocásticas de los demás coeficientes de frecuencia son bastantes similares.

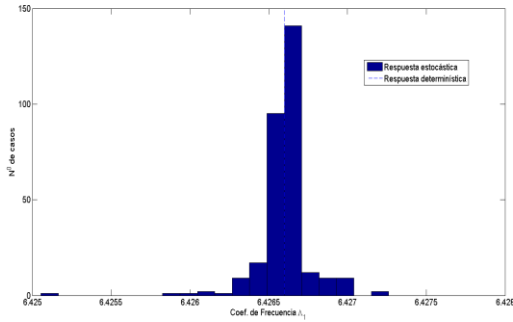


Figura 2. Dispersión de la respuesta en  $\Lambda_1$  con  $\Delta=0.01$

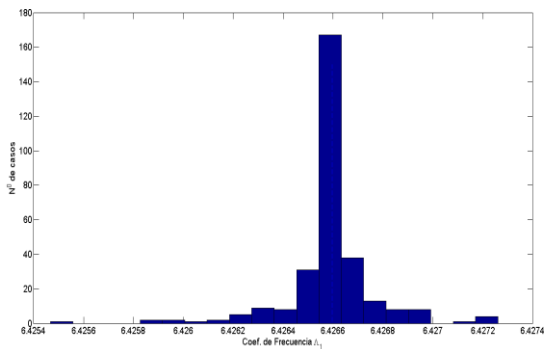


Figura 3. Dispersión de la respuesta en  $\Lambda_1$  con  $\Delta=0.05$

Analizando las dos figuras precedentes se puede establecer que la dispersión de la respuesta está contenida dentro de un muy pequeño entorno (menor al 0.1 %), a pesar que la incertidumbre del parámetro de posicionamiento se incrementó 5 veces ( $\Delta=0.01 \Rightarrow \Delta=0.05$ ). Por lo que la propagación de incertidumbre debida al ángulo  $\theta \approx V_1$  en las vibraciones libres de una viga rotante es ínfima.

### 4.3 Incertidumbre en las propiedades materiales

En este apartado se analiza la incertidumbre asociada a las variables aleatorias  $V_2$  y  $V_3$ , que repercuten solo en los parámetros adimensionales de la Ec. (14),  $\alpha$ ,  $\lambda$ , mientras que los parámetros  $k_s$  y  $L_x$  no son afectados pues existe correlación material entre  $G$  y  $E$ . Además la variable aleatoria  $\theta$  se mantiene constante en su valor determinístico  $\theta=0$ .

Se usa la función “unifrnd ( $V_{im}(1-\delta_i\sqrt{3}), V_{im}(1+\delta_i\sqrt{3})$ )”, para generar las realizaciones independientes de las variables aleatorias  $V_2$  y  $V_3$ . Se emplean distintos grados de dispersión identificados con los coeficientes de variación que se hacen

variar entre 5 % y 25 %. Téngase presente que para que las variables aleatorias  $V_2$  y  $V_3$  correspondan a un proceso estocástico de segundo orden, el valor máximo del coeficiente de variación tiene que ser tal que  $\delta_i < \sqrt{3}$ . El método de Monte Carlo se ha empleado con 400 simulaciones, lo que da una convergencia razonablemente rápida para este problema.

Así pues en las Fig. 4 y Fig. 5 se muestran las dispersiones para los coeficientes de frecuencia primero y segundo empleando  $\delta_i = 0.10$ . La distribución tiene tendencia al aspecto de la entrada, es decir se asemeja a una distribución uniforme.

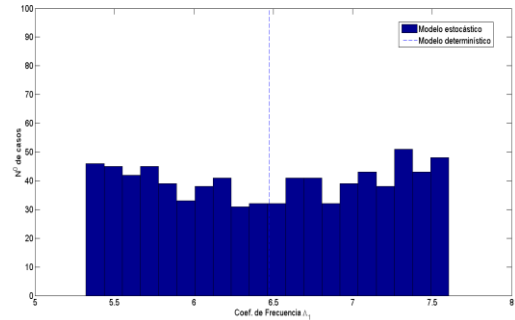


Figura 4. Dispersión de la respuesta en  $\Lambda_1$  con  $\delta_i=0.10$  en  $V_2$  y  $V_3$

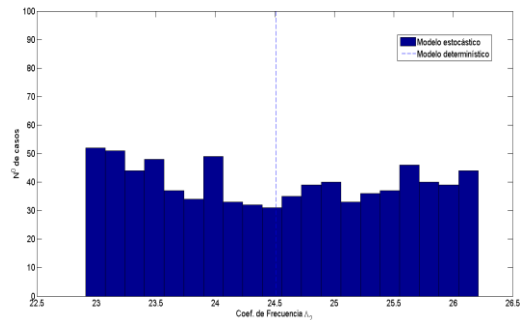


Figura 5. Dispersión de la respuesta en  $\Lambda_1$  con  $\delta_i=0.10$  en  $V_2$  y  $V_3$

En la Fig. 6 se muestra la diferencia entre la respuesta determinística y la respuesta media del modelo estocástico, con respecto al coeficiente de variación de las variables aleatorias  $V_2$  y  $V_3$ .

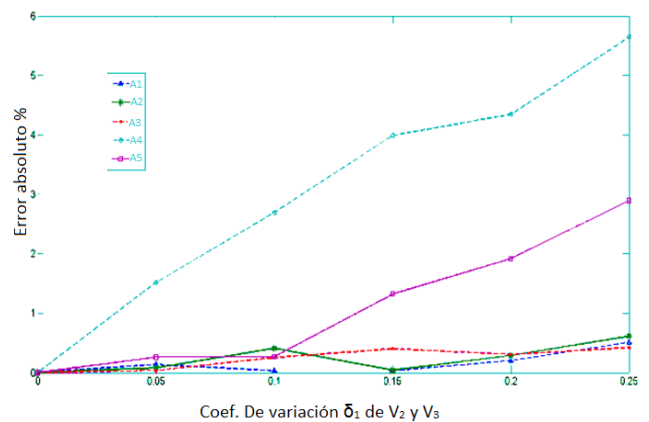


Figura 6. Error absoluto entre la respuesta determinística y la estocástica.

Se puede observar en la figura precedente que en las primeras tres frecuencias la diferencia es menor al 1.00 %, mientras que

en las frecuencias superiores crece con el incremento de la dispersión en los parámetros del modelo.

Para tener una noción de la magnitud de dispersión de la respuesta y su incremento en la medida que aumenta la incertidumbre de los parámetros del modelo, en la Tabla II se exponen los coeficientes de variación de las respuestas estocásticas de los cinco coeficientes de frecuencia de vibración natural.

**Tabla 2:** Coeficientes de variación  $\Lambda_i$

Coef. de frecuencia	Coeficiente de variación $\delta$ para $V_2$ y $V_3$			
	0.05	0.10	0.15	0.20
$\Lambda_1$	0.035	0.071	0.099	0.137
$\Lambda_2$	0.013	0.027	0.037	0.051
$\Lambda_3$	0.005	0.013	0.016	0.017
$\Lambda_4$	0.055	0.122	0.145	0.150
$\Lambda_5$	0.037	0.072	0.077	0.113

Se puede observar de la Tabla 2 que en la medida que aumenta la dispersión de las variables aleatorias asociadas a propiedades materiales, también aumenta la dispersión de las respuestas estocásticas. Sin embargo, para todos los coeficientes de frecuencia evaluados, la dispersión se mantiene en valores menores a la dispersión de los parámetros materiales.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha efectuado un estudio de la influencia de la propagación de incertidumbre vinculada a un conjunto de parámetros que se emplean para modelar una estructura esbelta rotante. Para dar mayor generalidad a los estudios se ha empleado un enfoque adimensional en la representación del modelo matemático de la estructura.

De estos estudios se puede concluir que el efecto de la variabilidad del anclaje en la respuesta estocástica de la viga rotante, es ínfima. Por otro, lado la variabilidad en las propiedades de material sí afecta a la respuesta estocástica. Aunque en este último caso no se produce mayor propagación de incertidumbre de la respuesta en relación a la incertidumbre de las variables de entrada.

## AGRADECIMIENTOS Y RECONOCIMIENTOS

Los autores desean reconocer el apoyo y auspicio de la Universidad de las Fuerzas Armadas, ESPE y de la SENESCYT del Ecuador. Además el primer autor desea agradecer el apoyo de la Universidad Tecnológica Nacional FRBB y el CONICET.

## REFERENCIAS

[1] J. Chung, H.H. Yoo, "Dynamic analysis of a rotating cantilever beam using the finite element method", *Journal of Sound and Vibration*, vol.249, pp.147-164, 2002

[2] Valencia E., Granja V., Palacios J., Poveda R., Cando E., Hidalgo V, Uncertainty analysis of a test - rig for centrifugal compressors, *Revista Politécnica*, Vol. 35 No 3, pp. 19-27, Febrero 2015.

[3] J. Simo, L. Vu-Quoc, "A three dimensional finite-strain rod model. part ii: computational aspects", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 58, No. 1, pp. 79-116, 1986.

[4] S. Talebi, A. Ariaei, "Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam with internal and external flexible connections", *Archives of Applied Mechanics*, DOI 10.1007/s00419-014-0930-2.

[5] S.A. Fazelzadeh, P. Malekzaedh, P. Zahedinejad, M. Hosseini, "Vibration analysis of functionally graded thin walled rotating blades under high temperature supersonic flow using the differential quadrature method", *Journal of Sound and Vibration*, vol.306, pp.333-348, 2007.

[6] S.A. Fazelzadeh, M. Hosseini, "Aerothermoelastic behavior of supersonic rotating thin-walled beams made of functionally graded materials", *Journal of fluids and structures*, vol.23, pp.1251-1264, 2007.

[7] J. Cheng, R.C. Xiao, "Probabilistic free vibration of beams subjected to axial loads", *Advances in Engineering Software*, vol.38, pp.31-38, 2007.

[8] S.A. Hosseini, S.E. Khadem, "Vibration and reliability of a rotating beam with random properties under random excitation", *International Journal of Mechanical Sciences*, vol.49, pp.1377-1388, 2007.

[9] T.G. Ritto, R. Sampaio, "Stochastic drill-string dynamics with uncertainty on the imposed speed and on the bit-rock parameters". *International Journal of Uncertainty Quantification*, vol.2(2), pp.111-124, 2011.

[10] E. Jaynes, *Probability Theory: The logic of Science*, Vol.1. Cambridge University Press, Cambridge, U.K. 2003.

[11] M.T. Piovan, R. Sampaio, J.M. Ramirez, "Dynamics of rotating non-linear thin-walled composite beams: Analysis of modelling uncertainties", *Journal Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* vol.34, pp. 612-621, 2012.

[12] S.Y. Lee, J.J Sheu, "Free vibration of an extensible rotating inclined timoshenko beam", *Journal of Sound and Vibration* vol. 304, pp. 606-624, 2007.

[13] FlexPDE 6.1 student version. <http://www.pdesolutions.com>