Dependencia de la Densidad de Energía de la Materia en el Universo con Respecto a la del Vacío: Evolución de los Parámetros de Densidad

Calahorrano Antonina[1]; Marín Carlos[1]

[1]*Universidad San Francisco de Quito, Departamento de Física, Quito, Ecuador*

Resumen: Partiendo de las ecuaciones de Friedmann se consideraron variaciones en el valor de la densidad de energía del vacío del universo con la finalidad de descubrir las restricciones y los cambios que esto generaría en la densidad de energía de la materia. A su vez, encontrando la dependencia entre ambas densidades, se hallaron las limitaciones ejercidas por la densidad de energía de la materia a la fluctuación en un futuro de la constante cosmológica de Einstein.

Palabras clave: Cosmología, Constante cosmológica, Densidad de energía del vacío, Ecuaciones de Friedmann

Universe Matter Energy Density Dependency on the Vacuum Energy Density: Evolution of Density Parameters

Abstract: Beginning with the Friedmann equations, variations on the value of the vacuum energy density of the universe were considered in order to find the restrictions for such variations and the effect that these will have on the matter energy density. Besides, by finding the dependence between both densities, the limitations exerted by the matter energy density on a future variation of the Einstein's cosmological constant were calculated.

Keywords: Cosmology, Cosmological constant, Vacuum density energy, Friedmann's equations

1. INTRODUCCIÓN

La cosmología actual tiene sus cimientos en el principio cosmológico, el cual enuncia que en cualquier instante el universo aparecerá el mismo para cualquier observador sin importar el lugar en dónde se encuentre (Liddle, 2003). El principio se cumple siempre y cuando dos suposiciones básicas sean ciertas: el universo es isotrópico y homogéneo. La primera suposición (isotropía) nos dice que a gran escala (a nivel de galaxias, cúmulos y supercúmulos de galaxias en el espacio profundo) el universo parece el mismo en cualquier dirección que se observe.

La segunda hipótesis (homogeneidad) dice que lo mismo sería cierto para un observador ubicado en otra galaxia (Marín, 2011; Liddle, 2003). La prueba de la primera hipótesis es la uniformidad de la radiación de fondo cósmico de microondas. En lo que respecta a la segunda hipótesis creemos en ella por razones de modestia (Marín, 2011). Basados en este principio, consideraremos al universo como un fluido perfecto, el cual obedece la ecuación de fluido universal Ecuación (1):

antoninacdp@gmail.com

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + P) = 0 \tag{1}$$

En donde ρ es la densidad del fluido y P su presión (Liddle, 2003; Marín, 2011).

Partiendo del principio cosmológico y de las ecuaciones de campo de Einstein, se pueden derivar las ecuaciones de Friedmann, que determinan totalmente la evolución del universo Ecuaciones (2) y (3):

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi\frac{G\rho}{c^2} + \frac{\lambda c^2}{3} - \frac{Kc^2}{R^2} \tag{2}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3}\pi G\left(\frac{\rho + 3P}{c^2}\right) + \frac{\lambda c^2}{3} \tag{3}$$

En donde R es el factor de escala del universo: una variable dependiente del tiempo que mide el ritmo de expansión del universo (Marín, 2011), K es un parámetro independiente del tiempo que define la curvatura del universo ($K =$ +1,0 o -1 según se trate de un universo cerrado, plano o abierto, respectivamente). A λ se le llama constante cosmológica de

Einstein, y es una medida de la contribución a la densidad de energía del universo debido a fluctuaciones del vacío (Liddle, 2003; Marín, 2011).

La densidad de materia-energía del universo (ρ) está conformada por tres diferentes densidades: la densidad de energía de la materia ρ_m, la densidad de energía de la radiación ρ_r y la densidad de energía del vacío ρ_v. Esta última densidad está relacionada con la constante cosmológica de Einstein por la expresión: $\rho_v = \frac{\lambda c^4}{8\pi G}$.
La densidad de energía de la materia ρ_m está dada por la contribución de toda la materia existente en el universo (incluida materia oscura), ρ_r tiene que ver con la energía térmica del universo y ρ_v está íntimamente relacionada con la energía de repulsión que ocasionó la inflación del universo en sus inicios (Marín, 2011; Peacock, 2010)

Para analizar estas densidades, es útil expresarlas en función de sus densidades cosmológicas $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$ (Komissarov, 2012; Lahav y Liddle, 2011), donde ρ_c es la densidad de energía crítica del universo.
Si $\rho < \rho_c$ el universo se expande para siempre, de lo contrario en un futuro distante, se produciría el colapso del mismo.

Finalmente, se puede analizar cómo el universo se expande (si acelerada o desaceleradamente) con la ayuda del parámetro de aceleración, que se define en la Ecuación (4):

$$q = -\frac{R(t)\frac{d^2R}{dt^2}}{\left(\frac{dR}{dt}\right)^2} \tag{4}$$

Si $q > 0$ el universo está desacelerando. Cuando $q < 0$ el universo está acelerando (Liddle, 2003; Marin, 2011).

Con las cuatro ecuaciones antes mencionadas se puede calcular la edad del universo, así como la forma en que éste llegará a su fin al utilizar diferentes valores para el parámetro de curvatura. Mediciones realizadas desde 1998 nos dicen que la geometría del universo es plana ($K = 0$), lo cual implica que su edad es de aproximadamente 13,8 [Gyr] (Ade et. al, 2014; Olive et. al., 2014). Esto coincide con el valor medido experimentalmente por la misión Planck, enviada en 2013 (Ade et. al., 2014). Sin embargo, todavía se tiene que explorar el efecto que una variación en la constante cosmológica (y en su densidad cosmológica asociada) causaría en la evolución de nuestro universo.

2. METODOLOGÍA

Comenzaremos escribiendo las densidades cosmológicas de la forma $\Omega_i = \Omega_i(t)$, donde i puede ser m, r, o v. Utilizando el valor de la densidad de energía crítica del universo $\rho_c = \frac{3H^2c^2}{8\pi G}$ (Marín, 2011), se tiene que:

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho_i(t)}{3H^2(t)c^2} \tag{5}$$

Donde $H(t)$ es el parámetro de Hubble, el cual se puede expresar en función del factor de escala del universo como $H = \frac{\dot{R}}{R}$, e indica la inercia con la que el universo se expande (Liddle, 2003). Se puede analizar el cambio temporal de las densidades cosmológicas (Ecuación (5)) derivándolas con respecto al tiempo (Ecuación (6)):

$$\dot{\Omega}_i = \frac{8\pi G}{3c^2H^2}\left[\dot{\rho_\iota} - 2\rho_i\left(\frac{\dot{H}}{H}\right)\right] \tag{6}$$

Recordando la Ecuación (1), y considerando la ecuación de estado $P = \omega\rho$, se tiene que:

$$\dot{\rho_\iota} + \frac{3\dot{R}}{R}\rho_i(1+\omega_i) = 0 \tag{7}$$

Cabe recalcar que ω es una constante y es diferente para cada densidad: para ρ_m, $\omega_m = 0$. En el caso de ρ_r, ω_r es igual a $\frac{1}{3}$. Al valor de ω_v se le encuentra experimentalmente, es aproximadamente igual a -1 (Ade et. al., 2014) y se le llama simplemente ω (Kenyon, 1996).

Considerando la Ecuación (7) en términos del parámetro de Hubble, tenemos (Ecuación (8)):

$$\dot{\rho_\iota} = -3H\rho_i(1+\omega_i) \tag{8}$$

Reemplazando este valor en la Ecuación (6), se obtiene (Ecuación (9)):

$$\dot{\Omega}_i = -\Omega_i H\left[3(1+\omega_i) + 2\left(\frac{\dot{H}}{H^2}\right)\right] \tag{9}$$

Derivando con respecto del tiempo el parámetro de Hubble y dividiendo para H^2, el parámetro de aceleración q (Ecuación (4)) se puede escribir:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -(q+1) \tag{10}$$

Combinando las Ecuaciones (9) y (10) se obtiene (11):

$$\dot{\Omega}_i = -\Omega_i H[3(1+\omega_i) - 2(q+1)] \tag{11}$$

Escribiendo la Ecuación (3) en función de las densidades cosmológicas, el parámetro de aceleración se puede expresar de acuerdo a la Ecuación (12):

$$q = \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r + \frac{\Omega_v}{2}(1+3\omega) \tag{12}$$

Si $\omega = -1$ en la Ecuación (12), $q = \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r - \Omega_v$. Finalmente, podemos expresar a la derivada de cualquier densidad cosmológica como:

$$\dot{\Omega}_i = \Omega_i H[-1 + \Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_v - 3\omega_i] \quad (13)$$

En donde la diferencia al considerar la densidad cosmológica de la materia, de la radiación o del vacío en la Ecuación (13) sería simplemente su ω_i asociado.

Las ecuaciones diferenciales para cada densidad cosmológica son:

$$\dot{\Omega}_m = \Omega_m H[(\Omega_m - 1) + 2(\Omega_r - \Omega_v)] \quad (14)$$
$$\dot{\Omega}_r = \Omega_r H[\Omega_m + 2(\Omega_r - 1) - 2\Omega_v] \quad (15)$$
$$\dot{\Omega}_v = \Omega_v H[\Omega_m + 2\Omega_r - 2(\Omega_v - 1)] \quad (16)$$

Las Ecuaciones (14), (15) y (16) dictan la evolución de los parámetros de densidad con respecto al tiempo. Sin embargo, lo que se busca es la dependencia de un parámetro de densidad con respecto al otro, así que se puede dividir a $\dot{\Omega}_m$ para $\dot{\Omega}_v$ para obtener**:**

$$\frac{d\Omega_m}{d\Omega_v} = \frac{\Omega_m}{\Omega_v}\frac{[(\Omega_m - 1) + 2(\Omega_r - \Omega_v)]}{[\Omega_m + 2\Omega_r - 2(\Omega_v - 1)]} \quad (17)$$

Nótese que la última relación (Ecuación (17)) es independiente del parámetro de Hubble. Ya que Ω_r es mucho menor que las otras densidades (Ade et. al., 2014), puede ser en este caso despreciada y se obtiene:

$$\frac{d\Omega_m}{d\Omega_v} = \frac{\Omega_m}{\Omega_v}\frac{[(\Omega_m - 1) - 2\Omega_v]}{[\Omega_m - 2(\Omega_v - 1)]} \quad (18)$$

La Ecuación (18) no tiene solución analítica, por lo que se utilizaron métodos numéricos para analizarla gráficamente así como a su inversa:

$$\frac{d\Omega_v}{d\Omega_m} = \frac{\Omega_v}{\Omega_m}\frac{[\Omega_m - 2(\Omega_v - 1)]}{[(\Omega_m - 1) - 2\Omega_v]} \quad (19)$$

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para resolver las ecuaciones diferenciales (18) y (19), se utilizó el método de Euler mejorado (Zill y Cullen, 2009). Algunos de los resultados se indican en las Figuras 1, 2, 3 y 4. Las Figuras 1 y 2 se encontraron utilizando la Ecuación (19), y variando Ω_m para encontrar valores de Ω_v. Así mismo, se utilizó el método de Euler para encontrar soluciones para Ω_m variando manualmente a Ω_v y utilizando la Ecuación (18). Dichas soluciones se ilustran en las Figuras 3 y 4.

Analizando estas curvas se encuentra que las soluciones dependen mucho de las condiciones iniciales, puesto que no sólo el valor final de las soluciones se altera cambiando dichas condiciones, sino también la forma de las curvas solución es afectada.

De hecho, la curvatura de las soluciones cambia cuando la condición inicial de Ω_m u Ω_v aumenta. Si la curva es convexa, ésta implica una especie de “aceleración”; cuando una de las variables cambia más allá de un cierto valor, la otra variable tendrá un cambio cuantitativamente mayor. Si por el contrario la curva es cóncava, el cambio será cada vez menos brusco mientras las variables evolucionen la una con respecto a la otra.

Se puede entonces observar que mientras mayor sea la diferencia entre el valor de la condición inicial de Ω_v y de Ω_m al valor de la condición límite de Ω_v, las variables van a intentar llegar a dicha condición límite cuantitaviamente de una manera más abrupta. Si por el contrario, existe una diferencia pequeña entre estos valores, el cambio hacia dicha condición ocurrirá
más suavemente.

Una diferencia fundamental entre las soluciones de la primera ecuación diferencial (18) y las de la segunda ecuación diferencial (19), es cómo la variable dependiente cambia cuando la independiente tiende a uno. El cambio de las soluciones inferiores de Ω_v vs. Ω_m es mucho más suave que el cambio en las soluciones análogas en Ω_m vs. Ω_v. Ya que estas soluciones no son temporales, hay que notar que no importa cómo la variable independiente varíe en el tiempo, de lo que se está hablando es de cambios en valores distintos para un tiempo fijo.

Es interesante observar que aumentar Ω_v al encontrar las curvas solución de la Ecuación (18) implica necesariamente que el valor de Ω_m disminuye. Además, nótese que con una condición inicial de la densidad cosmológica de materia mayor a 0,1 las soluciones superiores alcanzan $\Omega_v = 1$ antes de que Ω_m llegue a cero. De hecho, si se le obliga a Ω_v a tomar un valor superior a uno, las soluciones comienzan a oscilar violentamente. Esto se puede explicar analizando el denominador de la Ecuación (18).

Se debe notar que la derivada de la densidad cosmológica de materia con respecto a la del vacío diverge cuando $\Omega_m - 2(\Omega_v - 1) = 0$, lo cual implica que siempre que $\Omega_v - \frac{\Omega_m}{2} = 1$, la Ecuación (18) tenderá al infinito. Si el valor de Ω_v es menor que uno, dicha condición no se podrá cumplir pues Ω_m tendrá que ser negativo, lo cual no tendría sentido físicamente: no existirá singularidad. Si por el contrario Ω_v supera a uno, sí va a ser posible que Ω_m tome valores tales que exista una singularidad en la derivada.

Esto prohibirá un desarrollo estable de la dependencia de Ω_m con respecto de Ω_v, impidiendo físicamente el equilibrio. El análogo en la Ecuación (19) también se cumple, con lo cual también existe una restricción para que la densidad cosmológica de materia tome valores superiores a uno.

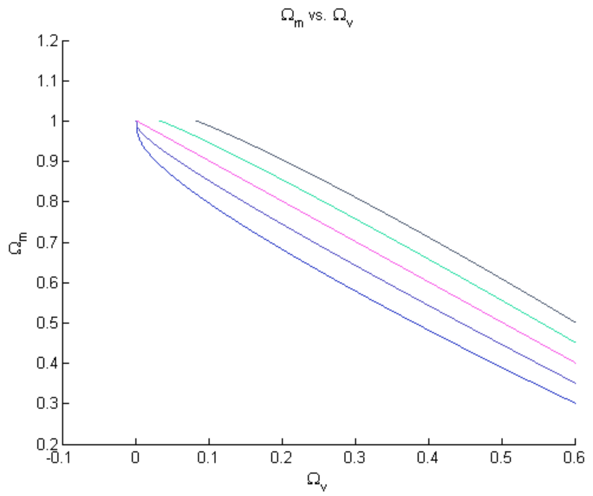

Figura 1. Familia de soluciones para Ω_v controlando a Ω_m. La condición de borde para Ω_v es 0,6.

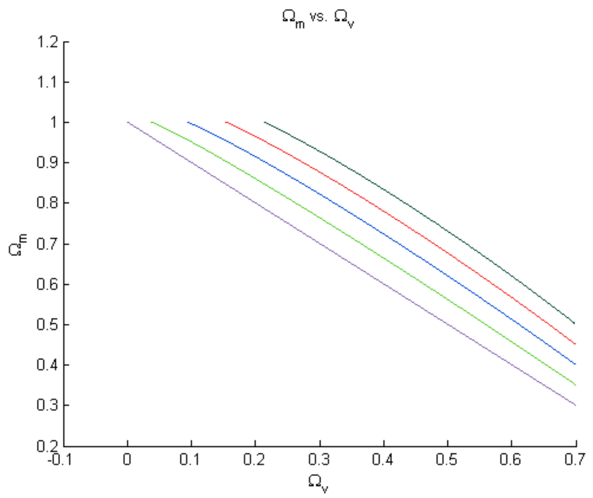

Figura 2. Familia de soluciones para Ω_v controlando a Ω_m. La condición de borde para Ω_v es 0,7.

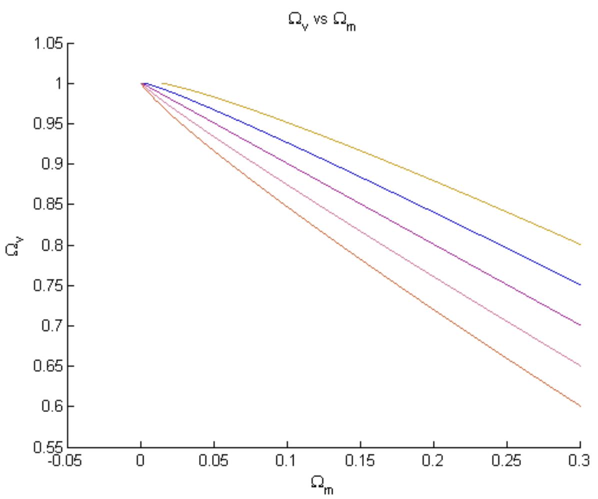

Figura 3. Familia de soluciones para Ω_m controlando a Ω_v. La condición de borde para Ω_m es 0,3.

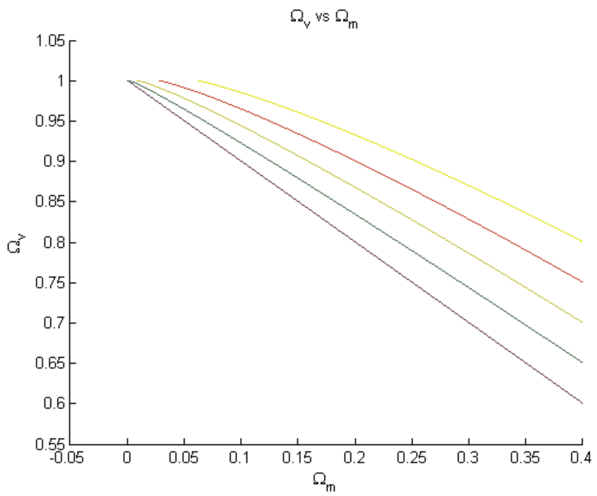

Figura 4. Familia de soluciones para Ω_m controlando a Ω_v. La condición de borde para Ω_m es 0,4.

Lo que en realidad interesa son las restricciones dentro de un rango de condiciones iniciales probables, es decir tomando a Ω_m entre 0,3 y 0,5 y a Ω_v entre 0,6 y 0,8. Para Ω_v entonces, la variación máxima va a ser entre 1 y 0 al tomar las condiciones iniciales menores posibles ($\Omega_v = 0{,}6$ y $\Omega_m = 0{,}3$). La variación mínima posible, encontrada con $\Omega_v = 0.8$ y $\Omega_m = 0{,}5$, estará entre 0,3674 y 1.

4. CONCLUSIONES

En el presente artículo se han encontrado ecuaciones diferenciales que relacionan el efecto de una variación en una de las densidades de energía en relación a otra densidad. Se probó que, dependiendo de las condiciones iniciales, las variables llegarán más o menos abruptamente al valor límite. Dicho valor límite está establecido por la condición de estabilidad de la solución de la ecuación diferencial ordinaria, la cual obliga a que la densidad cosmológica independiente no tome valores superiores a uno. Ya que tanto Ω_m como Ω_v tienen como valor límite uno, entonces considerando la definición de densidad cosmológica $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$, se tiene que: $\rho_i < \rho_c$. Recordando la definición de la densidad crítica del universo, se puede concluir que aunque existiera una variación en el valor de alguno de los parámetros de densidad, no existirá un colapso del universo.

En las soluciones donde Ω_m es la variable independiente, el cambio es más brusco para Ω_v, al contrario de cuando Ω_v es la variable independiente y Ω_m la dependiente. Sin embargo, el aumento en el valor de la variable independiente obliga siempre a la dependiente a disminuir. Utilizando este resultado, se encontró que la restricción para una posible variación de Ω_v depende de las condiciones iniciales usadas para resolver las ecuaciones diferenciales (18) y (19). Ω_v con condiciones iniciales $\Omega_v = 0{,}6$ y $\Omega_m = 0{,}3$ puede variar entre 0 y 1, mientras que con $\Omega_v = 0{,}8$ y $\Omega_m = 0{,}5$ como condiciones iniciales, Ω_v podrá variar solamente entre 0,3674 y 1.

REFERENCIAS

Kenyon, R. I. (1996). *General Relativity*. Oxford, United Kingdom: Oxford University Press.

Komissarov, S. S. (2012). *Cosmology*. Notes for the Cosmology Course at Leeds University. School of Mathematics: University of Leeds. Obtenido de: https://www1.maths.leeds.ac.uk/~serguei/teaching/cosmology.pdf [06/01/2015].

Lahav, O. y Liddle, A. R. (2011). The cosmological parameters. *The Review of Particle Physics*

Liddle, A. (2003). *An Introduction to Modern Cosmology*. Brighton, United Kingdom: Wiley.

Marín, C. (2011). *La Expansión del Universo, una Introducción a Cosmología, Relatividad General y Física de Partículas*. Quito, Ecuador: Universidad San Francisco de Quito

Olive, K. A., et al. (2014). Particle Physics Booklet, *Chinese Physics C*, 38(9), 322-378.

Peacock, J. A. (2010). *Cosmological Physics.* Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Planck Collaboration: Ade, P. A. R. et. al. (2014) . Planck 2013 results. XVI. Cosmological Parameters. *A&A,* 571 (A16). DOI: 10.1051/0004-6361/201321591.

Zill, D. y Cullen, M. (2009). *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera.* México D. F., México: CENGAGE Learning