El Análisis Multicriterio y el Teorema de Arrow

[1] Burbano Rafael

[1] Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias, Quito, Ecuador

Resumen: La relación entre el análisis multicriterio (AMC) y el teorema de Arrow es muy conocida. El problema del AMC, construir en el conjunto de alternativas una relación agregada a partir de las relaciones parciales definidas por los criterios, es paralelo al problema de la elección social, definir una preferencia social a partir de las preferencias de los individuos de la sociedad. En tanto y cuanto la formulación matemática es similar, el teorema de Arrow tendría plena aplicabilidad en el análisis multicriterio. En el presente estudio, se analiza y reflexiona sobre la correlación entre el análisis multicriterio y la teoría de la elección social. Un análisis más cuidadoso muestra algunas diferencias entre los conceptos paralelos de estas dos teorías; más aún, las formulaciones de Roy de las problemáticas del multicriterio limitarían la aplicabilidad del teorema de Arrow.

Palabras clave: Elección social, análisis multicriterio, teorema de Arrow.

Multi-criteria Analysis and Arrow's Theorem

Abstract: The relationship between multi-criteria analysis (MCA) and Arrow's theorem is well known. In multi-criteria analysis, from the partial relations defined by the criteria we want to build an order on the set of alternatives, this is parallel to the social choice problem, to define a social preference from the individuals' preferences. As long as the mathematical formulation are similar, Arrow's theorem would have full applicability in multi-criteria analysis. In the present study, we analyze and think over the correlation between the multi-criteria analysis and the social choice theory. A more careful analysis shows some differences between the parallel concepts of these two theories, indeed, Roy's formulations of the problem of multi-criteria limit the applicability of Arrow's theorem.

Keywords: Social choice, multi-criteria analysis, Arrow's theorem.

1. INTRODUCCIÓN

El mundo real se caracteriza por la complejidad y la incertidumbre y en el intento de comprenderla y actuar para modificarla es necesario recurrir a los instrumentos adecuados. Así, por sus particulares distintivas el análisis multicriterio (AMC) es una herramienta apropiada para el análisis de los problemas del mundo real.

El análisis multicriterio parte del enfoque sistémico de la realidad; por ello, las problemáticas son analizadas con un enfoque integral y holístico, desde las diversas dimensiones de la sociedad: económica, social, ambiental, cultural, política, tecnológica y legal.

"En las evaluación empíricas de proyectos públicos y bienes públicos proveídos, la teoría de la decisión multicriterio parece ser una herramienta política adecuada, ya que permite tomar en cuenta una amplia gama de criterios de evaluación (por ejemplo, el impacto ambiental, la equidad distributiva, y otros), y no sólo la maximización de los beneficios, como un agente económico privado lo haría (Arrow y Raynaud, 1986; Martínez-Alier et al, 1998). Como una herramienta para la gestión de conflictos, la evaluación multicriterio ha demostrado su utilidad en muchos problemas de la política y la gestión del medio ambiente (véase, por ejemplo Beinat y Nijkamp, 1998; Janssen y Munda, 1999; Munda, 1995; Nijkamp et al, 1990; Romero y Rehman, 1989).

Desde el punto de vista operativo, la principal fortaleza de los métodos multicriterio es su capacidad de rotar alrededor de preguntas caracterizadas por evaluaciones contradictorias, permitiendo así una evaluación integral del problema en cuestión" (Munda, 2003).

El problema que enfrenta el AMC es el de construir una relación agregada en el conjunto de alternativas a partir de las diferentes evaluaciones parciales determinadas por los distintos criterios económicos, sociales ambientales, etc.

El problema multicriterio tiene mucha similitud con el problema, en la Teoría de la Elección Social (TES), de la agregación de las preferencias de un conjunto de individuos sobre un conjunto de alternativas. Villar (1988) citando a Amartia Sen dice que el objeto de estudio de la Teoría de la Elección Social es el estudio de "las relaciones entre los objetivos de política social y las preferencias y aspiraciones de los miembros de la sociedad"; agrega que "el problema

rafael.burbano@epn.edu.ec

con el que se enfrenta la teoría de la elección social es el de derivar algún criterio de evaluación de las alternativas sociales a partir de las preferencias de los individuos de una sociedad". Es decir y según Mas-Colell et al (1995) la Teoría de la elección social "analiza en qué medida *las preferencias individuales se pueden agregar en una preferencia social*, o más directamente en una decisión social, de manera 'satisfactoria'; esto es, de manera compatible con el cumplimiento de ciertas condiciones deseables".

Al ser ambos problemas similares, se entendería que el teorema de Arrow, uno de los teoremas centrales en la TES, podría replicarse directamente o con alguna modificación al AMC. En este artículo se analiza esta posibilidad.

Luego de esta introducción el artículo contiene 5 partes o secciones restantes. En la segunda sección se presenta algunos elementos adicionales del análisis multicriterio; en la tercera se muestran las similitudes y diferencias entre los enfoques de la Teoría de la Elección Social y el Análisis Multicriterio; la cuarta está dedicada al teorema de Arrow; la sección quinta, expone la situación cuando se quiere obligatoriamente comparar las alternativas; finalmente, en la sexta sección se presentan las conclusiones.

2. ANALISIS MULTICRITERIO

El Análisis Multicriterio (AMC) o Análisis de Decisión Multicriterio (ADM) (en inglés Multicriteria Decision Making MCDM) se consolida en la década de los setenta (Fernández y Escribano, 2011). En ese entonces, el AMC se consideraba como una técnica particular de la Teoría de la Decisión que buscaba soluciones óptimas en contextos bien estructurados. Posteriormente, reconociendo que un problema con criterios múltiples no necesariamente admite una solución óptima, el AMC evoluciona a Ayuda a la Decisión Multicriterio (Multiple-criteria Decision Aid MCDA) (Roy, 1985); el enfoque es buscar una solución "satisfactoria" que responda lo mejor (o lo menos mal) a los múltiples criterios. El cambio fundamental es considerar a los problemas multicriterio como no bien estructurados matemáticamente; la solución final es más una creación que un descubrimiento; por eso el énfasis en la palabra "ayuda". En un tercer cambio transcendental, se impulsa la participación de los actores sociales (por ejemplo, Banville et al., 1998) y llegamos a la Evaluación Multicriterio Participativa (Participatory Multicriteria Evaluation PMCE).

Como una síntesis de estos procesos el profesor Giuseppe Munda propone la Evaluación Social Multicriterio (Social multicriteria evaluation SMCE), que enfatiza la participación de los actores sociales en problemas de decisión social caracterizados por alta incertidumbre y alto impacto social (Munda, 2004).

Los principios de la Evaluación Social Multicriterio (EMS) pueden resumirse en los siguientes puntos (Gamboa y Munda, 2007; Munda, 2003):

1. El esquema clásico de la relación decisor /analista está incrustado en un marco social, que es de importancia crucial en el caso de los problemas de elección pública, tales como el uso del suelo y de las políticas energéticas.

2. De acuerdo a la escala geográfica escogida, los actores sociales relevantes que tengan intereses en juego pueden ser identificados gracias al análisis institucional. El análisis institucional es un paso esencial para identificar posibles "grupos de interés" para un proceso participativo.

3. La combinación de diferentes métodos de participación, que ha demostrado su fortaleza en la investigación sociológica, se vuelve aún más fuerte cuando se integra con un marco multicriterio. Por ejemplo, el análisis institucional, llevado a cabo principalmente en base a documentos históricos, legislativos y administrativos, así como en la prensa local y entrevistas a personas clave, puede proporcionar un mapa de los actores sociales relevantes.

4. La evaluación de la política no es una actividad de un solo paso. Por el contrario, se lleva a cabo como un proceso de aprendizaje que suele ser muy dinámico, por lo que los juicios sobre la relevancia política de los objetos, las alternativas o los impactos pueden presentar cambios bruscos, por lo que se requiere de un análisis de la política de naturaleza flexible y adaptable. Esta es la razón por la que los procesos de evaluación deben tener un carácter cíclico.

5. En este marco, los algoritmos matemáticos siguen desempeñando un papel importante (por ejemplo, para asegurar que los rankings obtenidos sean consistentes con la información y los supuestos utilizados). Por esta razón, los algoritmos multicriterio, utilizados en un contexto social, deben ser tan simples como sea posible (es decir, con un número mínimo de parámetros exógenos) y su axiomatización debe ser completa y clara.

Estas extensas citas dejan en claro la importancia de la participación social en los proceso de decisión que involucren proyectos que afecten a una comunidad.

2.1. Fases o etapas del análisis multicriterio

Diversos autores presentan las fases o etapas de un proceso de análisis, evaluación y decisión multicriterio de manera un tanto diferente. Por ejemplo, Nunes et al (2003 citado por Díez y Etxano, 2008), Pomerol and Barba-Romero (2000), Munda (1998). Recapitulando y sintetizando los distintos esquemas considero que un problema de decisión multicriterio debemos abordarlo mediante el siguiente proceso:

1. Formulación del problema y planteamiento del objetivo general
2. Identificación de las alternativas y los criterios de evaluación
3. Evaluación de las alternativas en los criterios (construcción de la matriz de impacto)
4. Selección del método multicriterio

5. Aplicación del método multicriterio y análisis de sensibilidad
6. Análisis y evaluación de resultados
7. Conclusiones y recomendaciones
8. Decisión

En cada punto intermedio, entre una etapa y otra, puede y debe haber la discusión con los actores sociales y los decisores y, consecuentemente, se puede regresar a cualquiera de las fases previas en un proceso cíclico y continuo de evaluación y mejora como plantea la Evaluación Social Multicriterio.

2.2. Matriz de impacto o matriz de evaluación

El punto de partida del análisis multicriterio es un conjunto finito de m alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, y un conjunto finito de n criterios de evaluación $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. El criterio i es una función $f_i: X \longrightarrow Y_i$. La evaluación de una alternativa en un criterio puede ser un número real ($Y_i = \mathbb{R}$), un número difuso real ($Y_i = \mathcal{D}$), una distribución de probabilidad ($Y_i = \mathcal{S}$) o una categoría ordenada ($Y_i = \mathcal{C}$). Se asume además que f_i induce algún tipo de relación de orden R_i en el conjunto de alternativas[2].

La información sobre la evaluación de las m alternativas en los n criterios se condensa en la matriz de impacto o matriz de evaluación $M = (x_{ij})$ con $x_{ij} = f_j(x_i)$ (Martinez-Alier et al, 1998), que se describe a continuación:

Matriz de Impacto

		Criterios			
		f_1	f_2	$\dots$	f_n
Alternativas	x_1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1n}
	x_2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2n}
	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$
	x_m	x_{m1}	x_{m2}		x_{mn}

2.3. Formulaciones del AMC

El AMC tiene una triple aplicación, como metodología de análisis, de evaluación, y como sistema de ayuda para la toma de decisiones. El Diccionario de la Real Academia Española presenta las siguientes acepciones de estos términos: análisis es la "distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios o elementos"; en tanto que evaluación es "estimar, apreciar, calcular el valor de algo"; y decidir es "tomar una determinación de algo". La decisión está asentada en la evaluación y esta última en el análisis. Además, la decisión no es, en toda circunstancia, compulsiva.

Por ejemplo, un académico podría evaluar al grado de (in)sustentabilidad de las economías de los países andinos; sin embargo, podría ocurrir que el estudio no necesariamente identifique las acciones (alternativas) a ejecutar para mitigar los factores de riesgo; el estudio es únicamente de análisis y evaluación.

El flujo entre "análisis", "evaluación" y "decisión" se describe en la figura siguiente (Figura 1).

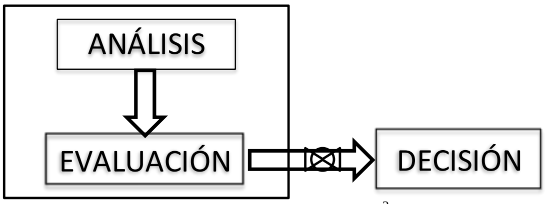


Figura 1. Análisis, evaluación y decisión[3]. Fuente: Autor

Las cuatro problemáticas de referencia o formulaciones del análisis multicriterio de Roy (Roy, 1996), que se sintetizan en la Tabla 1, permiten una mejor comprensión del alcance del análisis multicriterio:

Tabla 1. Problemáticas de referencia.

Formulación	Objetivo o meta	Clasificación
α	Identificar una y sólo una alternativa final	Evaluación y decisión
β	Asignar cada alternativa a una categoría predeterminada	Análisis-evaluación
γ	Clasificar las alternativas viables según un orden total o parcial	Evaluación y decisión
δ	Describir las alternativas relevantes y sus consecuencias	Análisis

Fuente: Roy (1996)

Las formulaciones α y γ - identificar una y sólo una alternativa final (usualmente la "mejor" alternativa) y clasificar las alternativas según un orden total (de la "mejor" a la "peor" alternativa) generalmente implican una decisión; por otra parte las formulaciones β y δ hacen referencia únicamente al análisis y evaluación de las alternativas.

Las formulaciones del AMC pueden expresarse en términos matemáticos a través del llamado funcional u operador o regla de agregación de los órdenes parciales R_i. La "agregación" de las relaciones de orden R_i es lo que denominamos "agregación de los criterios".

2.4. Operador de agregación

Para expresar las distintas formulaciones en términos más precisos, sean $\mathfrak{R} = \{R | R \subset X^2, \mathcal{P}_i(R)\}$ y $\mathfrak{P} = \{\mathcal{R} | \mathcal{R} \subset X^2, \mathcal{P}(\mathcal{R})\}$, dos conjuntos de relaciones definidas sobre el conjunto de alternativas X, donde el conjunto de propiedades

---

[2] Por "tipo de relación de orden" queremos decir una relación de orden, un preorden o un semiorden total. Estos órdenes podrían ser incluso difusos. Una relación R sobre el conjunto A es un subconjunto $R \subset A \times A$. Si $(x, y) \in A \times A$, si $(x, y) \in R$ se nota, $x\, R\, y$ o $R(x, y)$. Es común usar algún símbolo, por ejemplo $\gtrsim$ para notar la relación.

[3] El símbolo de los dos triángulos y el círculo es el de una "válvula de compuerta". La/el decisor decide si la abre o no.

$\mathcal{P}_i$ y $\mathcal{P}$ definen las condiciones que deben satisfacer las relaciones parciales R_i y la relación agregada $\mathcal{R}$.

Un funcional u operador o regla de agregación $\mathcal{H}$ de los n órdenes parciales $R_i \in \mathfrak{R}$, que determinan la relación o preferencia agregada $\mathcal{R} \in \mathfrak{P}$, es una función:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}: \mathfrak{R}^n & \longrightarrow & \mathfrak{P} \\ (R_1, R_2, \ldots, R_n) & \longmapsto & \mathcal{R} \end{array}$$

Siguiendo a Munda y Nardo (2005), en los modelos o métodos multicriterio que se fundamentan en la comparación por pares de alternativas, el operador $\mathcal{H}$ se descompone en dos procesos diferenciados[4]. El primero, hasta la determinación de la o las matrices de comparación por pares; el segundo, la comparación global de las alternativas.

Por ejemplo, en el modelo multicriterio paramétrico compensatorio no-compensatorio propuesto por Burbano (2014), las matrices de comparación por pares corresponden a las relaciones difusas: $I(\sim)$ indiferencia, $P(\succ)$ preferencia estricta y $J(\phi)$ incomparabilidad[5]. Sean $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ el conjunto de relaciones difusas sobre X reflexivas; simétricas y reflexivas; irreflexivas; y simétricas e irreflexivas respectivamente. El proceso para determinar I, P, J es primero definir una relación de "preferencia débil" $R(\gtrsim)$ y, a partir de ella, establecer dichas relaciones.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}: \mathfrak{R}^n & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathfrak{M} \xrightarrow{\mathcal{G}_1} \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_3 & \xrightarrow{\mathcal{G}_2} & \mathfrak{P} \\ (R_1, R_2, \ldots, R_n) & \longmapsto & R \longmapsto (I, P, J) & \longmapsto & \mathcal{R} \end{array}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \qquad \mathcal{G} = \mathcal{G}_2 \circ \mathcal{G}_1$$

En Burbano (2014), el primer proceso concluye con la evaluación de lo que denomina "relación o matriz de Copeland", que no es sino la selección, para cada par de alternativas $x, y \in X$, de la relación $I(x,y), P(x,y), P^{-1}(x,y)$ o $J(x,y)$ con el mayor grado de credibilidad. La matriz de Copeland describe la relación estructural entre las alternativas, corresponde entonces a la formulación δ; describe el mundo tal como es, complejo y, en ocasiones, incluso contradictorio. En este caso, $\mathfrak{P}$ es el conjunto de relaciones difusas definidas sobre X, sin ninguna restricción a priori.

Por otra parte, en el caso de la formulación γ (ordenar las alternativas), el conjunto $\mathfrak{P}$ corresponde al conjunto de relaciones de orden total o parcial sobre X, según sea el caso. Estas relaciones podrían ser difusas. Ahora bien, en la formulación menos restrictiva α (identificar una y sólo una alternativa final), $\mathfrak{P}$ puede tener la estructura de orden parcial denominada retículo[6] o incluso estructuras más débiles; de hecho, una estrategia podría ser identificar si la relación de Copeland tiene un elemento máximo; de ser este el caso es suficiente llegar hasta la matriz de Copeland.

Finalmente, para la clasificación de las alternativas en ciertas categorías (formulación β), la imagen del funcional es una relación de equivalencia pues este tipo de relaciones definen particiones en el dominio de definición. Posiblemente haya que utilizar información adicional.

2.5. Comparación débil de valores

Las consecuencias de considerar múltiples dimensiones y actores sociales es la posibilidad de evaluaciones contradictorias de una problemática tanto desde una perspectiva técnica como social. La primera hace referencia a resultados contrapuestos en la evaluación de diferentes criterios. Por ejemplo, el proyecto de construcción de una carretera podría ser valorado muy positivamente desde la perspectiva del empleo y la reducción de costos de transporte, pero podría tener evaluaciones ambientales negativas porque, digamos, atraviesa una zona de alta sensibilidad ambiental como una reserva natural.

A esto es lo que Giuseppe Munda (Munda, 2004:665) denomina "inconmensurabilidad técnica". El segundo tipo de evaluación contradictoria, denominada "inconmensurabilidad social" (Munda, 2004: 666), aparecería por ejemplo cuando el proyecto hipotético de la carretera esté apoyado por el sector empresarial pero sea muy cuestionado por grupos ambientalistas y comunidades asentadas en la reserva natural.

A partir de los conceptos sobre conmensurabilidad de Martínez-Alier et al (1998), Falconí y Burbano (2004) presentan un resumen, el cual se lo ha reelaborado ligeramente:

Conmensurabilidad o comparabilidad fuerte: Ocurre cuando los objetos pueden ser comparados gracias a la existencia de una escala de medida común. Por ejemplo, en la teoría microeconómica los objetos pueden ser comparados por la *utilidad* que de estos derivan los consumidores. En una institución de educación, los alumnos son evaluados por el *promedio de sus calificaciones*.

Conmensurabilidad fuerte: Se asume que existe una propiedad singular que todos los objetos la poseen y que es el origen de su valor y una medida cardinal que indica la cantidad, intensidad o grado en que la propiedad está presente. En temas económicos, sociales y ambientales, para la economía convencional la escala de medida común es el dinero. En el ámbito educativo, podríamos decir, por ejemplo, que el alumno Pedro con un promedio de 8,0 es mejor estudiante que Juan que tiene promedio 7,0.

Conmensurabilidad débil: Es una condición más débil que la anterior. La escala común de medida es únicamente ordinal. En la microeconomía la modelización de las preferencias del

[4] En los métodos multicriterio que no tienen esta base, como los métodos basados en la utilidad multicriterio, no se aplica esta descomposición.

[5] En el análisis multicriterio las expresiones comunes para las distintas relaciones son: $R(\gtrsim)$ "al menos tan buena como", $P(\succ)$ "mejor", $P^{-1}(\prec)$ "peor". P^{-1} es la relación inversa de P: $x\, P^{-1}\, y$ ssi $y\, P\, x$.

[6] Un retículo es un conjunto X con una relación de orden que tiene primer elemento, último elemento, y tal que todo par de elementos de X admite un supremo y un ínfimo.

consumidor es ordinal[7]. En el ejemplo de la educación, podríamos conocer que Pedro es primero y Juan es segundo, aunque ignoremos cuál es la “distancia” entre Pedro y Juan.

Inconmensurabilidad o comparabilidad débil: El punto de partida en la consideración de que hay una pluralidad de valores; es decir, muchos criterios de comparación que sólo nos permiten ordenar las opciones al elegir un determinado criterio. El conflicto de valor irreductible es inevitable pero compatible con una opción racional utilizando un cálculo práctico. Pedro es músico y matemático, Juan es atleta e historiador. ¿Es Pedro mejor que Juan o es Juan mejor que Pedro?

Inconmensurabilidad de valores: Las diferentes concepciones del valor vuelven incomparables a los objetos: para el gremio de músicos Pedro será mejor que Juan, para los historiadores lo será Juan. Los criterios de comparación son variados, con escalas de valor diferentes. Al apelar a distintos criterios, el resultado frecuentemente es que hay evaluaciones conflictivas de un mismo objeto. Esto es parte esencial de la filosofía del análisis multicriterio.

Otro concepto adicional, relacionado con la conmensurabilidad, es la noción de compensación entre criterios.

2.6. Compensación

Denis Bouyssou (1986) no aporta la noción intuitiva de compensación en la siguiente manera: “Intuitivamente, la compensación se refiere a la existencia de 'compensaciones', es decir, la posibilidad de resarcir una 'desventaja' en algún atributo por una "ventaja" suficientemente grande en otro atributo - mientras que “ventajas” más pequeñas no harían lo mismo”.

De acuerdo a esta definición, el concepto de compensación o de relación de preferencia compensatoria se refiere a suplir desventajas en ciertos atributos por ventajas *suficientemente grandes* en otros atributos. Si la desventaja es grande, posiblemente no sea posible compensarla.

Refiriéndose al concepto jurídico de compensación, García (2012) citando a Gutiérrez y González (1984) indica que “la palabra compensar deriva del vocablo latino *compensatio*, que se formó con los términos *pensare cum*, que significa ‘pesar con’ que denota la acción de balancear una deuda con otra”. En el balance, los dos brazos de la balanza están a una misma altura. La compensación podrá referirse a revertir la preferencia o a alcanzar la indiferencia; esto es, pasar de $x \succ y$ a $y' \succ x$ o pasar a $y' \sim x$ (Burbano, 2014).

En este punto tal vez cabría preguntarse si “el mundo” es compensatorio. La respuesta sería que la pregunta está equivocada. Lo correcto sería preguntarse ¿qué opinan los economistas (y los no economistas) sobre de la compensación? La respuesta es que hay desacuerdos, en muchas ocasiones radicales. Por ejemplo, respecto a la sustitución entre capital natural y capital artificial – el capital hecho por los humanos –, los economistas más apegados a “la corriente principal” consideran que un sistema económico es sustentable siempre que la “suma” de los capitales natural y artificial permanezca constante (sustentabilidad débil); dicho de otro modo, asumen que un tipo capital compensa al otro. Los economistas más cercanos a la economía ecológica “dan una especial importancia al capital natural y requieren que el stock de ambos tipos de capital el natural y el hecho por los humanos se mantengan” (Adams 1990) (sustentabilidad fuerte).

Esta importancia especial radica en la consideración de que hay funciones ambientales críticas que no pueden ser remplazadas por el capital artificial, así existe un nivel mínimo crítico de capital natural por debajo del cual la humanidad no dispondrá de los servicios ecosistémicos necesarios para su supervivencia (England, 2000), de ahí que el mantenimiento del capital natural crítico sea esencial para la sostenibilidad ambiental; es decir, asumen que la compensación es, al menos, limitada.

Si la compensación no es una propiedad ontológica de la realidad sino que responde a la visión de mundo de los individuos, la compensación entre criterios debería tener el mismo tratamiento que la determinación de los pesos de los criterios; es decir, los actores sociales en procesos democráticos participativos, como lo propugna la Evaluación Social Multicriterio, establecerían cuáles son los grados de compensación entre criterios.

3. EL ANÁLISIS MULTICRITERIO Y LA TEORÍA DE LA ELECCIÓN SOCIAL

El problema de la elección social en forma abstracta se expresa de la siguiente manera (Mas Collel et al, 1995) : Sean $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ un conjunto de m alternativas o estados sociales; $\mathfrak{R}$ el conjunto de relaciones racionales definidas sobre el conjunto de alternativas, $\mathfrak{R} = \{R | R \subset X^2$, R es racional[8]$\}$. Asumimos que existen n individuos o agentes y que las preferencias del individuo i se describen por la relación $R_i \in \mathfrak{R}$. Un funcional de bienestar social u operador de agregación de preferencias es un funcional que agrega las n preferencias en una única preferencia social agregada:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}: \mathfrak{R}^n &\longrightarrow \mathfrak{R} \\ (R_1, R_2, \dots, R_n) &\longmapsto \mathcal{R} \end{aligned}$$

Las similitudes y analogías entre los elementos del AMC y la elección social se presentan en la siguiente tabla (Tabla 2):

[7] Las preferencias ordinales adquieren un carácter cardinal cuando se introduce el dinero. La “disposición a pagar” expresa la intensidad de las preferencias.

[8] Una relación racional es una relación completa, reflexiva y transitiva.

Tabla 2. Análisis multicriterio y elección social

AMC	Elección social
Alternativas	Alternativas
Criterios	Preferencias de los individuos
Tomador de decisiones	Observador ético / sociedad
Actores sociales	Individuos
Operador de agregación	Funcional de bienestar social

Hagamos algunas precisiones sobre estos elementos.

3.1. Alternativas

En relación a las alternativas no hay diferencia, en ambas teorías las alternativas son los objetos a analizar y/o comparar.

3.2. Criterios

En la elección social, las preferencias corresponden a los gustos o predilecciones de los individuos; son preferencias subjetivas (dependen de las personas); en tanto que, en el AMC los criterios corresponden a indicadores objetivos (no dependen de las personas). Por ejemplo, si me preguntan ¿en qué país preferiría vivir?, yo podría responder: Colombia, y si no puedo, Ecuador y en tercer lugar, Perú. Esta elección sólo depende de mis gustos. Si preguntan ¿cuál es la tasa de delincuencia (robos por cada 100 mil habitantes)?, la respuesta es: Colombia: 178,9; Ecuador: 101,5; Perú: 92,6. Estos datos son independientes de mi percepción de la delincuencia en estos países[9] y tampoco está relacionado con lo que a mí me gustaría que fuesen.

Las preferencias individuales representan preferencias ordinales en el modelo estándar de Kenneth Arrow, pero pueden representar funciones de utilidad en un modelo más general. En cualquier caso se asume racionalidad. En muchos modelos multicriterio, el uso de umbrales de incertidumbre es de fundamental importancia. Los modelos de elección social no incorporan este elemento.

Es interesante notar que el supuesto de racionalidad se cumple para los criterios del AMC, ya que se asume alguna condición de "mejor"; por ejemplo, "es mejor menos delincuencia a más delincuencia". Paradójicamente, las preferencias de los individuos podrían ser no racionales. Si a un ciudadano le preguntamos qué opción prefiere: la construcción de un hospital en el bosque cercano a la ciudad o el mantenimiento del bosque; el ciudadano podría responder: "no me pronuncio, pues considero que es una comparación forzada, podría haber otras opciones que permitan mantener el bosque y satisfacer la necesidad de construir el hospital". Las personas en el ámbito restringido de la comparación de bienes en un mercado podrían ser racionales[10]; en ámbitos más amplios los individuos podrían actuar como tomadores de decisiones multicriterio y aceptar como resultado la incomparabilidad de las alternativas. Citemos a Kahneman, Ritov y Schkade: "La economía y la psicología ofrecen perspectivas opuestas sobre la cuestión de cómo las personas valoran las cosas. El modelo económico de elección se refiere a un agente racional cuyas preferencias obedecen a una red apretada de reglas lógicas, formalizadas en la teoría del consumidor y en los modelos de toma de decisiones bajo riesgo. La tradición de la psicología, en cambio, no es afín a la idea de que la lógica de la elección racional puede servir una doble función como un modelo de comportamiento de decisión real. Gran parte de la investigación del comportamiento se ha dedicado a la ilustración de decisiones que violan la lógica del modelo económico. *La afirmación implícita es que la gente no tiene preferencias, en el sentido en que ese término se utiliza en la teoría económica* (Fischhoff, 1991; Slovic, 1995; Payne, Bettman y Johnson, 1992). Por tanto, es razonable preguntarse: si las personas no tienen preferencias económicas, ¿qué tienen en su lugar? ¿La psicología proporciona nociones teóricas que puedan explicar, al menos en algunos contextos, tanto las aparentes violaciones del modelo racional de preferencias como las regularidades observadas"? (Kahneman et al, 1999). (Resaltado mío)

3.3. Tomador de decisiones

En el AMC se postula la existencia de un tomador de decisiones. Puede ser un individuo, una empresa, un gobierno local o alguna otra autoridad[11]. En la agregación de preferencias no queda claro quién cumple este papel. Podría argumentarse que "la sociedad" es quien toma las decisiones; sin embargo, de ser así, los procesos electorales serían permanentes, habría varios al día. Para superar esta dificultad se han diseñado los sistemas de gobierno que permiten elegir un mandatario para que en representación de la sociedad tome las decisiones. Pero por supuesto no hay garantía de que un gobierno democráticamente elegido represente el "interés público". La historia ecuatoriana y de muchos otros países es pródiga en ejemplos de gobernantes que al llegar al poder ejecutaron políticas opuestas por las cuales fueron electos. Al ser evidente que no es "la sociedad" quien toma decisiones, la teoría de la elección social habla de un "observador ético que deriva una preferencia colectiva sobre el conjunto de alternativas factibles a partir de las funciones de utilidad individuales" (D'aspremont y Gevers, 1977). En mi opinión es una forma de evadir el problema de la interrelación decisor/actores sociales/analista.

3.4. Actores sociales

En el AMC los actores sociales son importantes y pueden o no ser los tomadores de decisión. En todo caso, las relaciones entre los tomadores de decisión, los actores sociales y los analistas están mediadas por la estructura social y la distribución del poder entre los miembros, grupos y clases sociales de una sociedad. Justamente como lo dice Giuseppe

[9] Fuente: BID, Sistema Regional de Indicadores Estandarizados de Convivencia y Seguridad Ciudadana, año 2008. Recuperado el 8/08/2013 de http://www.seguridadyregion.com/images/Indicadores/robos.pdf

[10] Aunque quizá Daniel Kahneman diría que, incluso en este marco restringido, no. Ver adicionalmente: Kahneman y Tversky (1986), y Kahneman, (2003).

[11] Respecto a la relación entre decisor y actores sociales ver el siguiente punto.

Munda (2003) “la relación decisor/actores sociales/analista[12] está incrustada en un marco social, que es de importancia crucial en el caso de los problemas de elección pública”. Si los decisores responden o no a los actores sociales, si permiten, facilitan, alientan o no la participación social es, en mi opinión, un tema que puede ser mejor comprendido desde la óptica de la teoría política y no desde la economía.

Para la teoría de la elección social no hay actores sociales, el individualismo metodológico de la economía neoclásica concibe al sistema económico como el agregado de “agentes individuales”; los actores sociales son los individuos y no tienen participación en el proceso de decisión, son meros argumentos de la función de utilidad.

3.5. Operador de agregación

En la TES el dominio del funcional de bienestar social (operador de agregación) es el espacio $\mathfrak{R}^n$, donde $\mathfrak{R}$ es el conjunto de relaciones de preferencia racionales sobre el conjunto de alternativas. Una ampliación del modelo de la TES es tomar como dominio $\mathfrak{R}$’: el conjunto de funciones de utilidad. La relación de preferencia racional o la función de utilidad representan las preferencias de un individuo. El codominio del funcional de bienestar social es siempre $\mathfrak{R}$ el conjunto de relaciones de preferencia racionales (relaciones de orden o de preorden total) sobre el conjunto de alternativas.

En el AMC, $\mathfrak{R}$ es un conjunto de relaciones de algún tipo; pueden ser relaciones de orden, preorden o semiorden total y estas relaciones pueden ser no difusas o difusas. El dominio es más amplio que en la TES. En relación al codominio, en la formulación más restrictiva de γ (definir un orden total en las alternativas) el codominio del operador de agregación es $\mathfrak{P}$, el conjunto de relaciones de orden total sobre el conjunto de alternativas. Hay una analogía casi perfecta entre la TES y el AMC. En todo caso, la formulación del AMC es más general que la formulación de la TES pues la primera puede incluir relaciones de orden no difuso en el conjunto de las alternativas. Por otra parte, en la formulación δ (análisis de las alternativas) el conjunto de llegada del operador de agregación es $\mathfrak{C}$ el conjunto de relaciones de Copeland que, en esencia, no tiene ninguna estructura a priori; las formulaciones del AMC y la TES son, en este caso, diferentes.

4. EL TEOREMA DE ARROW

Es bien conocido que Kenneth Arrow dio un tratamiento axiomático a la TES. Arrow primero estableció ciertas condiciones o propiedades (axiomas) razonables que se considera deben cumplir las reglas de agregación de las preferencias, para luego intentar encontrar la regla que satisfaga estos axiomas. Al final Arrow demostró que tal regla no existe[13].

El teorema de Arrow es un tema de amplio debate, y continuará siéndolo. Comparto la opiniones de Scott (1994) de que “Más como ‘modelo’ de la realidad el paradigma neoclásico es defendible como un poderoso instrumento de análisis ‘negativo’ para identificar los límites de la racionalidad que enfrenta la acción humana en situaciones sociales” y de que, sin embargo, la metodología neoclásica y la teoría política “son de gran relevancia si se interpretan como modelos *complementarios*”.

En mi punto de vista, los problemas de la elección social deben ser analizados desde la perspectiva propuesta por Munda para la Evaluación Social Multicriterio (ESM), y bajo este paraguas, la axiomatización de la elección social permitiría analizar la consistencia de los resultados, las limitaciones de los métodos de elección popular, las paradojas que se presentan, etc.

Veamos los axiomas de los operadores de agregación. Notemos que estas propiedades hacen referencia a relaciones no difusas.

4.1. Propiedades de los operadores de agregación

Sea $\mathfrak{R}$ el conjunto de relaciones de preferencia racionales definidas sobre el conjunto de alternativas $X = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$. Consideremos el operador $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}: \mathfrak{R}^n &\longrightarrow \mathfrak{R} \\ (R_1, R_2, \dots, R_n) &\longmapsto R \end{aligned}$$

Sea $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de índices de los individuos.

Definición 1 (Aumento del grado de preferencia). Se dice que el grado de la preferencia parcial entre A_i y A_j aumenta ssi de P_k^{-1} se pasa a I_k o P_k, o de I_k se pasa a P_k: $(A_i\, P_k^{-1}\, A_j) \wedge [(A_i\, I_k'\, A_j) \vee (A_i\, P_k'\, A_j)]$ ó $(A_i\, I_k\, A_j) \wedge (A_i\, P_k'\, A_j)$. Para la preferencia agregada el grado de la preferencia entre A_i y A_j aumenta ssi de P^{-1} se pasa a I, J o P; o de J se pasa a I o P; de I se pasa a P: $(A_i\, P^{-1}\, A_j) \wedge [(A_i\, I'\, A_j) \vee (A_i\, J'\, A_j) \vee (A_i\, P'\, A_j)]$ ó $(A_i\, J\, A_j) \wedge [(A_i\, I' A_j) \vee (A_i\, P' A_j)]$ ó $(A_i\, I\, A_j) \wedge (A_i\, P'\, A_j)$.

Definición 2 (Propiedades de los operadores). Se dice que el operador de agregación de preferencias $\mathcal{H}$ es:

1. Paretiano ssi $\mathcal{H}$ respeta la unanimidad de la preferencia estricta entre las alternativas. O sea, ssi para todos los

[12] Como se aprecia en la cita textual previa de esta frase, Gamboa y Munda sólo mencionan la relación decisor/analista; sin embargo, por todo el contexto de la EMS, la interrelación con los actores sociales es uno de los aspectos más importantes del análisis multicriterio.

[13] Erik Maskin (2009) al referirse Arrow comenta: “Aunque la regla de la mayoría viola la decisión y la regla de la mayoría viola la independencia, Ken pensó que seguramente debe haber otras reglas de votación que satisfacen los cuatro axiomas: decidibilidad, consenso, ausencia de un dictador y la independencia de alternativas irrelevantes. Pero después de probar regla tras regla, con el tiempo llegó a sospechar que estos axiomas son colectivamente contradictorios. Y así es como nació el teorema de imposibilidad, Ken mostró que no hay una regla de votación que satisfaga los cuatro axiomas.

individuos, la alternativa A_i es estrictamente preferida a A_j, en la preferencia agregada también; es decir: $\forall k \in \Omega$, $A_i\, P_k\, A_j \Longrightarrow A_i\, P\, A_j$.

2. Paretiano estricto ssi para todos los individuos, la alternativa A_i es débilmente preferida a A_j, y si para algún individuo es estrictamente preferida, en la preferencia agregada también lo es: $\forall k \in \Omega$, $A_i\, R_k\, A_j \wedge \exists j \in \Omega, A_i\, P_j\, A_j \implies A_i\, P\, A_j$.

3. Simétrico entre criterios (anónimo) ssi no importa los nombres de los individuos. Es decir, hay un trato igualitario para todos ellos. Esto se estable de la manera siguiente: un cambio de orden entre los criterios no afecta el resultado del funcional. Si σ es una permutación de Ω, entonces:
$$\mathcal{H}(R_1, R_2, \dots, R_n) = \mathcal{H}(R_{\sigma(1)}, R_{\sigma(2)}, \dots, R_{\sigma(n)})$$

4. Neutral entre alternativas ssi la preferencia agregada se invierte cuando se invierten las preferencias parciales originales.
$$\mathcal{H}\left({R_1}^{-1}, {R_2}^{-1}, \dots, {R_n}^{-1}\right) = \mathcal{H}(R_1, R_2, \dots, R_n)^{-1}$$

5. Tiene respuesta positiva ssi en la preferencia agregada A_i es débilmente preferida a A_j y si aumenta el grado de preferencia parcial de A_i sobre A_j para algún $k \in \Omega$, entonces A_i es estrictamente preferido a A_j. Si $A_i\, R\, A_j$ y para algún $k \in \Omega$, $\left\{\left(A_i\, P_k^{-1}\, A_j\right) \wedge \left[\left(A_i\, I_k^{'}\, A_j\right) \vee \left(A_i\, P_k^{'}\, A_j\right)\right]\right\} \vee \left\{\left(A_i\, I_k\, A_j\right) \wedge \left(A_i\, P_k^{'}\, A_j\right)\right\}$ entonces $A_i\, P'\, A_j$; donde $R = \mathcal{H}(R_1, \dots, R_k, \dots, R_n)$, $R' = \mathcal{H}(R_1, \dots, R_k', \dots, R_n)$.

   Adicionalmente puede añadirse un axioma adicional relacionado con el axioma de respuesta positiva.

5b. No decreciente ssi el grado de la preferencia agregada entre A_i y A_j no decrece cuando aumenta el grado de preferencia de A_i sobre A_j para algún $k \in \Omega$. Si para algún $k \in \Omega$, $\left\{\left(A_i\, P_k^{-1}\, A_j\right) \wedge \left[\left(A_i\, I_k^{'}\, A_j\right) \vee \left(A_i\, P_k^{'}\, A_j\right)\right]\right\} \vee \left\{\left(A_i\, I_k\, A_j\right) \wedge \left(A_i\, P_k^{'}\, A_j\right)\right\}$ entonces $\left(A_i\, I\, A_j\right) \implies \left[\left(A_i\, I'\, A_j\right) \vee \left(A_i\, P'\, A_j\right)\right] \vee \left(A_i\, J\, A_j\right) \implies \left[\left(A_i\, J'\, A_j\right) \vee \left(A_i\, P'\, A_j\right)\right] \vee \left(A_i\, P\, A_j\right) \implies \left(A_i\, P'\, A_j\right)$; donde $R = \mathcal{H}(R_1, \dots, R_k, \dots, R_n)$, $R' = \mathcal{H}(R_1, \dots, R_k', \dots, R_n)$

6. Satisface el axioma de independencia de alternativas irrelevantes ssi la relación agregada $A_i\, R\, A_j$ depende únicamente de las preferencias entre estas alternativas. De manera formal, R_k y $R_k^{'}$ son relaciones en X, $k \in \Omega$, y si $R_k \middle| \{A_i, A_j\} = R_k^{'} \middle| \{A_i, A_j\}$ para todo $k \in \Omega$, entonces:
$(R_1, R_2, \dots, R_n) \middle| \{A_i, A_j\} = \mathcal{H}(R_1^{'}, R_2^{'}, \dots, R_n^{'}) \middle| \{A_i, A_j\}$.
   $R|Y$ es la restricción de la relación R al subconjunto de alternativas Y.

7. Dictatorial. ssi existe un individuo k llamado dictador tal que la preferencia estricta del dictador determina la preferencia estricta agregada: $A_i\, P_k\, A_j \Rightarrow A_i\, P\, A_j$.

La definición de $\mathcal{H}$ implícitamente define tres condiciones adicionales:

8. Universalidad del dominio. La regla de agregación $\mathcal{H}$ se aplica a cualquier vector de preferencias racionales $(R_1, R_2, \dots, R_n)$.

9. Racionalidad de la relación agregada. La relación agregada R es completa, reflexiva y transitiva sobre el conjunto de alternativas X (es un orden o preorden total o completo).

10. Decidible débil. En cualquier conjunto de alternativas X se puede identificar un elemento máximo.
    Decidible fuerte. En cualquier conjunto de alternativas X se puede identificar un único elemento máximo.

Observación. La condición de simetría entre criterios es más general que la condición de no existencia de un dictador. De igual manera, si la relación agregada es un orden o preorden total, se cumple que es decidible fuerte o débil respectivamente.

Previo a enunciar el teorema de Arrow veamos dos de los aperadores más conocidos: la regla de la mayoría simple y el método de Borda. En la regla de la mayoría, se elige a A_i como mejor alternativa a A_j ssi un mayor número de electores prefiere a A_i sobre A_j (Dasgupta y Maskin, 2003). Si para el elector k, $A_i \succ A_j$, se cuenta un voto a favor de A_i; si ocurre lo contrario $A_j \succ A_i$, el voto es a favor de A_j; y si $A_i \sim A_j$, asignamos medio voto a favor de cada alternativa. En el método de Borda, cada elector, ordena las alternativas descendentemente -de mejor a peor- y asigna el valor $n - 1$ a la mejor alternativa, $n - 2$ a la siguiente mejor y así sucesivamente: La cuenta o puntuación de Borda es la suma de los puntajes obtenidos (Conitzer y Sandholm, 2005). Cuando hay empates entre las alternativas, el puntaje asignado a las alternativas empatadas es el promedio de los puntajes que le correspondería en un ordenamiento estricto arbitrario de éstas.

Ejemplo1. Consideremos 4 alternativas (A, B, C, D) y 3 votantes, y la digamos que las preferencias de los electores son: $A \succ_1 B \succ_1 C \succ_1 D$, $A \succ_2 D \succ_2 B \succ_2 C$, $C \succ_3 A \succ_3 D \succ_3 B$.

La matriz de votación[14] para la mayoría simple y el cuadro de puntuaciones de Borda son:

[14] La matriz de votación es la matriz $V(a_{ij})$ donde a_{ij} es el número de votos a favor de $A_i \succ A_j$.

Matriz de votación

	A	B	C	D
A		3	2	3
B	0		2	1
C	1	1		2
D	0	2	1	

Cuenta de Borda

	$V1$	$V2$	$V3$	CB
A	3	3	2	8
B	2	1	0	3
C	1	0	3	4
D	0	2	1	3

Entonces es fácil ver que el resultado de la mayoría simple es: $A \succ B$, $A \succ C$, $A \succ D$, $B \succ C \succ D$, $D \succ B$; en tanto que el resultado del método de Borda es: $A \succ C \succ B \sim D$.

Analicemos el cumplimiento de las propiedades de los operadores de agregación:

Paretiana. Ambos cumplen. Si todos los electores votan por A_i mejor que A_j; entonces, i) en la votación agregada $A_i \succ A_j$ tiene m votos; ii) A_i tiene un puntaje de Borda más alto que A_j.

Paretiana estricto. Ambos cumplen. Si los electores votan por A_i mejor que A_j o A_i igual que A_j pero un elector vota A_i mejor que A_j; i) en la votación agregada $A_i \succ A_j$ tiene al menos 1 voto de ventaja; ii) A_i tiene al menos un punto en la cuenta de Borda que A_j.

Simetría entre criterios. Ambos cumplen. En la votación total y la cuenta de Borda sólo importan los totales.
Neutral entre alternativas. Ambos cumplen. Al invertir las preferencias, la votación total y la cuenta de Borda se "dan la vuelta".

Respuesta positiva. Ambos cumplen. Si en la votación total o en la cuenta de Borda A_i estaba mejor o igual que A_j, y si un elector aumenta el grado de preferencia de A_i sobre A_j (pasa de "en contra" a "empate" o "a favor"); entonces, si A_i estaba mejor que A_j, seguirá mejor; y si estaban empates, A_i tendrá un o dos votos a favor (A_i gana y A_j pierde medio voto o un voto).

Monotonía no decreciente. Ambos cumplen. La votación total y la cuenta de Borda se incrementan.

Axioma de independencia de alternativas irrelevantes. La regla de la mayoría cumple (sólo se contabilizan los votos por A_i y A_j, no intervienen las otras alternativas); el método de Borda no cumple (el puntaje final depende del conjunto de alternativas).

Dictatorial. Ambos operadores son no dictatoriales pues satisfacen la simetría entre criterios.

Universalidad del dominio. Ambos cumplen. No hay restricciones sobre los votos de los electores.

Racionalidad de la relación agregada. La regla de la mayoría no cumple (se pueden generar ciclos). El método de Borda genera un preorden total.

Decidibilidad. La regla de la mayoría no cumple (en un ciclo no hay se puede identificar un máximo). En el método de Borda se puede identificar uno o varios maximales.

Teorema de Imposibilidad de Arrow. No existe ningún funcional de preferencia social que sea universal, paretiano, no dictatorial y que satisfaga el axioma de independencia de alternativas irrelevantes.
Demostración. Para una demostración ver por ejemplo Mas-Colell et al, 1995.

Veamos la aplicación del teorema de Arrow al análisis multicriterio.

Teorema 1. Sea $\mathcal{H}$ el operador de agregación:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}: \mathfrak{R}^n &\longrightarrow \mathfrak{P} \\ (R_1, R_2, \dots, R_n) &\longmapsto R \end{aligned}$$

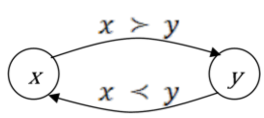
donde: $\mathfrak{R}$ es el conjunto de relaciones de semiorden; $\mathfrak{P}$ es el conjunto de relaciones de orden o preorden[15]. El operador $\mathcal{H}$, cualquiera que este sea, no satisface las propiedades: paretiana, simetría entre criterios, neutralidad entre alternativas, respuesta positiva, y la independencia de alternativas irrelevantes.

demostración. Si existiese tal operador de agregación, habría también un funcional de preferencia social que cumpliría las condiciones de Arrow; como sabemos que no es así, no existe tal operador de agregación.

Notemos que, en la formulación δ (análisis de las alternativas) no tiene sentido analizar si se cumple o no el teorema de Arrow, pues en este caso se llega únicamente a la relación de Copeland que, no impone ninguna restricción sobre el codominio $\mathfrak{C}$.

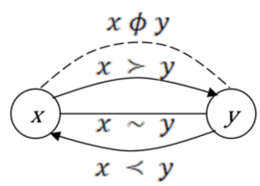
Destaquemos que al definir la relación de Copeland se selecciona la relación de mayor grado, es decir, que R^* se determina por la aplicación de la regla de la mayoría. La regla de la mayoría dice que la opción $x \succ y$ se elige por sobre $y \succ x$ si y solo si el número de votos a favor de la primera es mayor que el número de votos a favor de la segunda.

Regla de la mayoría



Se elige la relación $x * y$ de más alta votación.

Copeland



Se elige la relación $x * y$ de más alta credibilidad.

[15] Formulación γ de un problema multicriterio.

La regla de la mayoría es un principio democrático de aceptación general que satisface las condiciones de simetría entre agentes, neutral entre alternativas y de respuesta positiva (teorema de May). Además la regla de la mayoría es robusta en el sentido de que si alguna otra regla satisface las condiciones de Arrow para un dominio restringido (en un subconjunto propio $Y \subset \mathfrak{R}^n$) entonces la regla de la mayoría también las satisface (teorema de Dasgupta y Maskin de robustez (1998)). Es, en cierto sentido, "la mejor regla de agregación".

5. AJUSTANDO LA REALIDAD

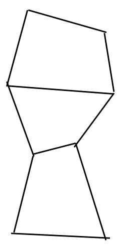
El teorema de Arrow no dice que no es posible determinar un método de agregación perfecto ¿qué opción nos queda?

Restringiéndonos a la formulación γ, una opción es definir algún tipo de métrica en el conjunto $\mathfrak{C}$ y buscar la relación $\mathcal{R} \in \mathfrak{P}$ más parecida a la relación de Copeland R^*. Estaríamos intentando preservar lo más posible el principio de la mayoría: sean s una medida de similitud, d una medida de distancia

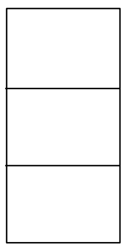
$$\max_{R \in \mathfrak{P}} s\big(\mathcal{R}, R^*(R_1, R_2, \dots, R_n)\big)$$
$$\Leftrightarrow \min_{R \in \mathfrak{P}} d\big(\mathcal{R}, R^*(R_1, R_2, \dots, R_n)\big)$$

Ahora bien, si partimos de que la relación de Copeland representa a la realidad, al definir la relación agregada $\mathcal{R}$ significaría que estamos torciendo la realidad para adecuarla a cómo queremos que sea esta realidad.

$\mathfrak{C}$



$\mathfrak{P}$



Si esto es así, deberíamos imponer en $\mathfrak{P}$ las mínimas condiciones de manera que el ajuste de la realidad sea lo menos exigente. Una posibilidad es elegir $\mathfrak{P}$ como el conjunto de semiórdenes difusos, en razón de que esta es la estructura menos restrictiva que permite ordenar linealmente un conjunto de alternativas.

Específicamente, se puede extender el método de Codorcet, para la comparación global de las alternativas, el segundo proceso del operador de agregación $\mathcal{H}$.

5.1. Método de Condorcet

El método de Condorcet o el problema de optimización de Condorcet (Monjardet, 1990) es encontrar un orden lineal estricto P tal que la suma S de los votos a favor $A_i \; P \; A_j$ sea máxima (Ecuación 1):

$$S = \underset{P \in \mathfrak{R}}{Max} \sum_{A_i \, P \, A_j} v_{ij} \qquad (1)$$

$$v_{ij} = \text{número de votos a favor de } A_i \; P \; A_j$$

En la extensión del problema de optimización de Condorcet, el objetivo es encontrar $\mathcal{R} \in \mathfrak{P}$ tal que S sea igual a (Ecuación 2):

$$S = \underset{\mathcal{R} \in \mathfrak{P}}{Max} \sum P(x_i, x_j) + \sum_{j > i} I(x_i, x_j) \qquad (2)$$

Por el teorema de Arrow, este proceso no es infalible, no se cumple el axioma de independencia de alternativas irrelevantes. El incumplimiento de esta condición se relaciona con la posibilidad de manipular los resultados introduciendo alternativas que no tienen la opción de ser seleccionadas como las mejores ("spoiler" en el argot político norteamericano, "chimbadores" en el habla popular ecuatoriana). Sin embargo, si nos acogemos a la máxima de Borda "mi método está orientado únicamente para gente honesta", las alternativas chimbadoras no serán consideradas. En la aplicación de un modelo multicriterio que incumpla el axioma de independencia de alternativas irrelevantes pero que posibilite construir la relación agregada $\mathcal{R}$ es mucho más lo que se gana que lo que se pierde.

Ejemplo 2. Consideremos nuevamente el ejemplo 1. Sea $\mathfrak{P}$ el conjunto de órdenes lineales. Aplicamos la variante del método de Condorcet propuesta por Burbano (2009); esto es el algoritmo de Tideman que consiste en ordenar los arcos del grafo asociado a la matriz de votación según un orden lexicográfico y ir agregando los arcos hasta tener un orden completo. En el ordenamiento lexicográfico, primero se ordenan por el "peso del arco" (la votación total) y luego por la diferencia de la puntuación de Borda.

La matriz de pesos de los arcos, incluyendo como segunda coordenada la diferencia de la puntuación de Borda es:

Matriz de pesos de los arcos

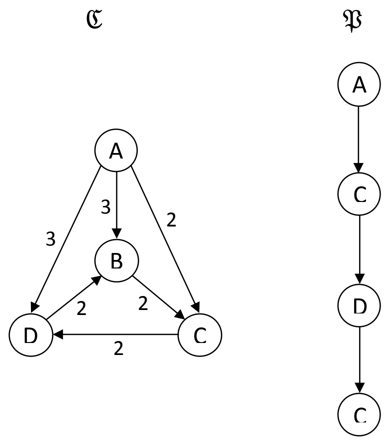
	A	B	C	D
A		(3,5)	(2,4)	(3,5)
B	(0,-5)		(2,-1)	(1,0)
C	(1,-4)	(1,1)		(2,1)
D	(0,-5)	(2,0)	(1,-1)	

Por lo que al ordenar los arcos nos queda (6 primeros):

Peso	Arco
(3,5)	(A, B)
(3,5)	(A, D)
(2,4)	(A, C)
(2,1)	(C, D)
(2,0)	(D, B)
(2,-1)	(B, C)

Al eligen estos arcos el resultado es: $A \succ C \succ D \succ B$

En forma de grafo los resultados de la regla de la mayoría simple y de la aplicación de la regla de Condorcet son:



En el grafo lineal, se grafican únicamente los arcos consecutivos.

6. CONCLUSIONES

A pesar de la clara analogía entre el análisis multicriterio y la teoría de la elección social hay marcadas diferencias. Tal vez la mayor de ellas es el tratamiento a los actores sociales, tomadores de decisión y analistas. Puede afirmarse que la teoría de la elección social busca evadir la problemática decisor/actores sociales/analista; al igual que su teoría madre más general, la economía neoclásica, excluye del análisis los problemas relativos a los conflictos sociales y las diferencias de poder al interior de una sociedad pretendiendo ser una teoría "neutral" frente a la política. Por el contrario, el análisis multicriterio pone en el centro de la discusión a los grupos sociales y los conflictos de interés y para ello propone la evaluación social multicriterio que postula la resolución democrática concertada de los conflictos que inevitablemente aparecen en todas la sociedades.

El teorema de Arrow se presta a varias lecturas e interpretaciones tanto en la teoría de la elección social como en el análisis multicriterio. Para algunos teóricos de la elección social, el teorema muestra que la idea de una voluntad colectiva es incoherente (Anderson, 1998:44) y que, por tanto, la democracia nos impone una trampa de la que no podemos escapar. Ahora bien, en otras visiones de la política, ésta sólo tiene sentido cuando la concebimos como la acción de grupos sociales y no de individuos. Para Antonio Gramsci, la política es la ética de lo *colectivo*. Si lo colectivo es la característica de la política, no tiene sentido pensar el bien común como un agregado de voluntades individuales determinadas aisladamente (Anderson, 1998). Podríamos preguntarnos entonces, desde los aspectos formales, ¿qué ocurre en la teoría de elección social si en vez de individuos y preferencias individuales se introduce el concepto de grupos sociales y de preferencias colectivas?

En el análisis multicriterio el teorema de Arrow, si bien no siempre tiene sentido aplicarlo (cuando nuestro interés es únicamente el análisis y evaluación), nos dice que (en la formulación γ) cualquier método multicriterio tendrá limitaciones. De alguna manera en el campo del análisis multicriterio se ha abandonado la idea de un método universal aplicable en toda circunstancia y lugar. Es así que en las "fases del análisis multicriterio" se considera como uno de los pasos la selección del método multicriterio más adecuado al problema que se está analizando. Esto, a mi entender, significa que dependiendo del problema concreto que se esté analizando, lo adecuado sería, por ejemplo, utilizar un modelo multicriterio lexicográfico, o un modelo no difuso compensatorio, o modelo difuso totalmente compensatorio, etc.

El teorema de Arrow al mostrarnos los límites de los formalismos matemáticos, en vez de reducir el campo de estudio nos invita a desarrollar nuevos métodos multicriterio y a profundizar en el análisis de los métodos actuales. De esta manera, se ratifica que tanto o más que los resultados, la calidad del proceso de evaluación es importante.

REFERENCIAS

Adams, W. (1990). *Green Development. Environment and sustainability in a developing world*. Taylor & Francis e-Library.

Bouyssou, D. (1986). Some remarks on the notion of compensation in MCDM. *European Journal of Operational Research*, 26, 150–160.

Bouyssou, D. & Vansnick, J. (1986). Noncompensatory and generalized noncompensatory preference structures. *Theory and Decision*, 21, 251–266.

Burbano, R. (2009). Condorcet y Borda: ¿confrontación o diálogo? *Primer Congreso Científico Internacional en Economía y Finanzas, Escuela Politécnica Nacional*.

Burbano, R. (2014). Un Modelo Multicriterio Paramétrico Compensatorio No-compensatorio. *Tesis de Doctorado en Economía del Desarrollo (en preparación)*, Quito, FLACSO.

Conitzer, V. & Sandholm, T. (2005). Common voting rules as maximum likelihood estimators. *UAI*. Obtenido de: http://www.cs.cmu.edu/~sandholm/MLEvoting.uai05.pdf (Julio 2009).

Cioni, L. (2010). A few notes on the Borda and Condorcet methods. *Technical Report: TR-10-16*. Universidad de Pisa, Departamento de Informática.

d'Aspremont C. & Gevers, L. (1975). Equity and the Informational Basis of Collective Choice. *The Review of Economic Studies*, 44(2), 199-209.

Dasgupta P. & Maskin, E. (2003). On the robustness of majority rule and unanimity rule. Obtenido de: http://publications.ias.edu/sites/default/files/robustness.pdf (Mayo 2014).

Dasgupta P. & Maskin, E. (2003), Is majority rule the best voting method?. Obtenido de: www.econ.cam.ac.uk/faculty/dasgupta/MajRuVot.pdf (Mayo 2014).

Díez, M. & Etxano, I. (2008). La Evaluación Social Multi-criterio como alternativa para la evaluación de la política de conservación de la naturaleza. *XI Jornadas de Economía Crítica*, Bilbao.

England, R. (2000). Natural capital and the theory of economic growth. *Ecological Economics*, 34(3), 425-431.

Falconí, F. & Burbano, R. (2004). Instrumentos económicos para la gestión ambiental: decisiones monocriteriales versus decisiones multicriteriales, *Revista Iberoamericana de Economía Ecológica*, 1, 11-20.

Fernández, G. & Escribano M. (2011), La Ayuda a la Decisión Multicriterio: orígenes, evolución y situación actual. *VI Congreso internacional de historia de la estadística y de la probabilidad*. Obtenido de: http://www.ahepe.es/VICongreso/descargas/Gabriela_Fdz_Barberis.pdf (Julio 2009).

Fishburn, P. (1976). Noncompensatory preferences. *Synthese*, 393-403.

Fodor J. & Roubens, M. (1994). Valued preference structures. *European Journal of Operational Research*, 79, 277–286.

Gamboa, G. & Munda, G. (2007). The problem of windfarm location: A social multi-criteria evaluation framework. *Energy Policy*, 35, 1564–1583.

García, J. (2012). La compensación jurídico-económico-financiera como solución entre la deuda económica ecológica ambiental y la externa, Instituto de Investigaciones Jurídicas de la UNAM, Biblioteca Jurídico Virtual, 2012. Obtenido de: http://biblio.juridicas.unam.mx/revista/pdf/DerechoPrivado/3/dtr/dtr4.pdf (Marzo 2014).

Gutiérrez y González, E. (1984). Derecho de las obligaciones, 5ta ed, México. Cajica.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1986). Rational Choice and the Framing of Decisions. *The Journal of Business*, 59(4), part 2: The Behavioral Foundations of Economic Theory.

Kahneman, D. (2003). Maps of Bounded Rationality: Psychology for Behavioral Economics. *The American Economic Review*, 93(5).

Martínez-Alier, J., Munda G. & O'Neill, J. (1998). Weak comparability of values as a foundation for ecological economics. *Ecological Economics*, 26, 277-286.

Mas-Colell, A., Winston, M. & Green, J. (1995). *Microecomic Theory*. New York, Oxford University Press.

Maskin, E. (1978). A Theorem on Utilitarianism, *Review of Economic Studies*, 46 (4), 93-96.

Maskin, E. (2009). The Arrow impossibility theorem. Where do we go from here?. Obtenido de: http://www.sss.ias.edu/files/papers/econpaper93.pdf (Marzo 2014).

Monjardet, B. (1990). Sur diverses formes de la «règle de Condorcet» d'agrégation des préférences. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 111, 61-71.

Munda, G. (2003). Multicriteria Assessment. *Internet Encyclopaedia of Ecological Economics*, International Society for Ecological Economics.

Munda, G. (2004). Social multi-criteria evaluation (SMCE): methodological foundations and operational consequences. *European Journal of Operational Research*, 158 (3), 662–677.

Munda, G. & Nardo, M. (2005). Non compensatory composite indicators for ranking countries: a defensible setting. *Institute for the Protection and Security of the Citizen*.

Nunes, P., van den Bergh, J. & Nijkamp, P. (2003). *The Ecological Economics of Biodiversity. Methods and Policy Applications*. Cheltenham, Edward Elgar.

Pomerol, J. & Barba-Romero, S. (2000). *Multi-criterion decisions in management: Principles and practice*. Massachusetts, Kluwer.

Roy, B. (1985). *Méthologogie Multicritère d'Aide à la Décision*. París, Ediciones Económica.

Roy, B. (1996). *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*", Kluwer , Academic Publishers.

Rudas, I. & Fodor, J. (2009). Fundamentals of fuzzy preference modeling. *8th WSEAS International Conference on Applied Informatics and Communications* (AIC'08).

Scott. J. (1994). El análisis económico de la política, *Política y Gobierno*, 1(2). Obtenido de: http://www.politicaygobierno.cide.edu/num_anteriores/Vol_I_N2_1994/Scott.pdf (Abril 2013).

Vallejo, M., Larrea, C., Burbano R. & Falconí, F. (2011). *La Iniciativa Yasuní-ITT desde una perspectiva multicriterial*. Quito. Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo PNUD.

Villar, A. (1988). La lógica de la elección social: una revisión de los resultados básicos, *Investigaciones Económicas*, Segunda Época, 12, 3-44.

Young, P. (1990). Condorcet's Theory of Voting. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 111, 45-59.