Comparación y Contraste de los Enfoques Clásico (Ambrosetti y Rabinowitz) y Topológico (Katriel) del Teorema de Mountain Pass (Paso de Montaña)

Aguilar, Miguel[1] * ; Calahorrano, Marco[1]

[1] *Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemática, Quito, Ecuador*

Resumen: En este artículo se presentan los esquemas de demostración del Teorema de Paso de Montaña *clásico* de Ambrosetti y Rabinowitz y del Teorema de Paso de Montaña *topológico* de Katriel. Se estudian brevemente las aplicaciones particulares de dichos teoremas: existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales y teoremas de homeomorfismos, respectivamente. Se demuestra que existe un teorema en teoría de puntos críticos en dimensión finita que puede verse como una aplicación en común de ambos resultados. Se hace un análisis de las características teóricas de la estructura de las demostraciones de ambos teoremas y para finalizar, se buscan relaciones lógicas entre éstos.

Palabras clave: Paso de Montaña, Análisis no-lineal, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Topología General.

Comparison and Contrast of the Classical (Ambrosetti and Rabinowitz) and Topological (Katriel) Approaches of the Mountain Pass Theorem

Abstract: In this article we present the outlines of the proofs of the *classical* Mountain Pass Theorem by Ambrosetti and Rabinowitz and the *topological* Mountain Pass Theorem by Katriel. We study the particular applications of these theorems: existence of solutions for partial differential equations and homeomorphisms theorems, respectively. We prove that there exists a theorem in critical point theory in finite dimension that can be seen as a common application of both results. We made an analysis of the theoretical characteristics of the structure of the proofs of each theorem and finally we show if there is a logical relation between them.

Keywords: Mountain Pass, Non-linear analysis, Partial Differential Equations, General Topology.

1. INTRODUCCIÓN

En el ámbito académico matemático, la denominación Teorema de Paso de Montaña (abreviado TPM de aquí en adelante) suele asociarse automáticamente a un resultado de Ambrosetti y Rabinowitz (1973) enmarcado en el Análisis no-lineal. La razón de esta asociación automática se debe a la popularidad de sus aplicaciones en el campo de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, campo de amplio interés en Matemática y Ciencias afines. Sin embargo, bajo el mismo nombre existen otros resultados considerablemente menos populares pero de igual interés teórico. El presente es un trabajo en el que se realiza un análisis de comparación y contraste entre el famoso TPM de Ambrosetti y Rabinowitz, que se conoce como teorema *clásico*, y uno de esos resultados menos conocidos, el TPM *topológico*, introducido por Katriel (1994).

El TPM clásico garantiza la existencia de puntos críticos para funcionales diferenciables definidos en espacios de Banach con imagen en la recta real. La siguiente definición describe qué es un punto crítico.

Definición 1.1 (Punto crítico de un funcional diferenciable)**.** Sean E un espacio de Banach, $U \subset E$ un abierto e $I : U \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Un punto crítico de I es un punto $u \in U$ tal que

$$I'(u) = 0.$$

Si además $I(u) = c \in \mathbb{R}$, se dice que u es un punto crítico de I al nivel c.

*miguel.aguilar@epn.edu.ec
Recibido: 04/03/2020
Aceptado: 03/04/2020
Publicado: 31/05/2020
10.33333/rp.vol45n2.01

Una de las hipótesis más importantes del TPM clásico es el cumplimiento de la condición de *Palais-Smale* por parte del funcional; tal condición se define a continuación.

Definición 1.2 (Condición de Palais-Smale)**.** Considérese E un espacio de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Una sucesión $(u_k)_k$ con $u_k \in E$ es llamada sucesión de Palais-Smale para I, si $(I(u_k))_k$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, e $I'(u_k) \to 0$ (en E'). Se dice que I satisface la condición de Palais-Smale (abreviando: I satisface (PS)) si toda sucesión de Palais-Smale para I tiene una subsucesión convergente (en E).

Ahora, se presenta el enunciado del TPM clásico.

Teorema 1.1 (Teorema de Paso de Montaña Clásico (Ambrosetti y Rabinowitz, 1973))**.** *Sea E un espacio de Banach e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ un funcional continuamente diferenciable que satisface (PS) y tal que $I(0) = 0$. Supóngase que existen ρ y α números reales positivos tales que cumplen:*

1. *Si $\|u\| = \rho$ entonces $I(u) \geq \alpha$,*
2. *Existe $v \in E$ tal que $\|v\| > \rho$ e $I(v) \leq 0$.*

Entonces I posee al menos un punto crítico a un nivel $c \geq \alpha$.

Las propiedades *1.* y *2.* de este teorema son conocidas como la geometría del funcional. A cualquier funcional que posea esas características se le llama un funcional con *geometría de paso de montaña*.

La demostración original del TPM clásico puede encontrarse en el artículo de Ambrosetti y Rabinowitz (1973) en donde por primera vez aparece; sin embargo, una versión más detallada es presentada por el propio Rabinowitz (1986).

Por su parte el TPM topológico es un teorema que toma lugar en espacios topológicos de amplia generalidad: no se precisa de ninguna noción de operaciones y mucho menos de diferenciabilidad, como en el caso del clásico; por ello, es preciso definir una noción distinta de punto crítico, ya que la definición usual utiliza la estructura diferencial de los espacios, de las que en este caso se carece.

Definición 1.3 (Punto de paso de montaña)**.** Sean X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que $x \in X$ es un punto global de paso de montaña (abreviado PM) de f si para toda vecindad V de x, el conjunto

$$\{y \mid f(y) < f(x)\} \cap V$$

es disconexo. Se dice que x es un punto local de PM de f si existe una vecindad M de x tal que x es un punto global de PM para $f|_M$.

La principal hipótesis sobre el funcional sobre el que actúa el TPM topológico es el crecimiento al infinito que se describe a continuación.

Definición 1.4 (Función creciente al infinito)**.** Sea X un espacio topológico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice creciente al infinito si para todo $x \in X$ existe un compacto $K \subset X$ tal que $f(z) > f(x)$ para todo $z \notin K$.

Antes de enunciar el teorema se recuerda lo que es un espacio compactamente conexo.

Definición 1.5 (Espacio compactamente conexo)**.** Un espacio topológico X es llamado compactamente conexo si para cada par de puntos $x_1, x_2 \in X$ existe un conjunto K compacto y conexo tal que $x_1, x_2 \in K$.

Teorema 1.2 (Teorema de Paso de Montaña Topológico (Katriel, 1994))**.** *Sea X un espacio topológico localmente conexo y compactamente conexo, $f \in C(X)$ una función continua y creciente al infinito. Supóngase que existen $x_1, x_2 \in X$ y $S \subset X$ tales que cumplen:*

1. *S separa x_1 y x_2,*
2. $\max\{f(x_1), f(x_2)\} < \inf_{x\in S} f(x) = p$.

Entonces f posee un mínimo local o un punto global de paso de montaña a un nivel $c \geq p$.

Que $S \subset X$ separe x_1 y x_2, quiere decir que x_1 y x_2 se encuentran en distintas componentes conexas de $X \backslash S$.

Este teorema fue demostrado por Katriel (1994), quien también demuestra una versión para espacios métricos.

2. NOCIONES TEÓRICAS Y PRÁCTICAS DE LOS TEOREMAS DE PASO DE MONTAÑA

Para desarrollar el análisis comparativo entre los dos teoremas se exploró detalladamente las características estructurales de la demostración de cada uno de ello y sus aplicaciones particulares. Una vez obtenidas se procedió a analizar sus relaciones.

2.1 Estructura de la demostración del TPM clásico

Aunque no se realizará la demostración del TPM clásico, un esquema de la misma será presentado, para lo cual algunas definiciones son necesarias.

Definición 2.1 (Deformación)**.** Sean E un espacio de Banach y $A \subset B \subset E$. Se dice que B es deformable en A si existe una función continua $\eta : [0,1] \times B \to B$ tal que cumple con las siguientes tres características:

$$\begin{aligned} \eta(0,u) &= u, && \forall u \in B, \\ \eta(t,u) &\in A, && \forall u \in A \text{ y } \forall t \in [0,1], \\ \eta(1,u) &\in A, && \forall u \in B. \end{aligned}$$

Observación 2.1. En general, para $B \subset E$, se llama deformación de B a la función continua $\eta : [0,1] \times B \to B$ que satisfae $\eta(0,u) = u$ para todo $u \in B$.

Definición 2.2 (Subniveles de un funcional)**.** Sea E un espacio de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se define,

$$I^a = \{u \in E \mid I(u) \leq a\}.$$

Estos conjuntos son conocidos como los subniveles del funcional I.

Definición 2.3 (Familia invariante)**.** Sea E un espacio de Banach y sea η una deformación en E. Una familia Γ de subconjuntos de E se dice invariante para η si

$$\forall A \in \Gamma \text{ y } \forall t \in [0,1], \quad \eta(t,A) \in \Gamma.$$

Definición 2.4 (Clase de minimax)**.** Sea E un espacio de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional. Cualquier familia Γ de subconjuntos de E es llamada una clase de minimax, y el valor

$$c = \inf_{A\in\Gamma} \sup_{u\in A} I(u)$$

es llamado el nivel de minimax de Γ.

Definición 2.5 (Familia α-admisible)**.** Sea E un espacio de Banach, $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional, $\alpha > 0$ un número real, Γ una clase de minimax y c su nivel de minimax. Se dice que Γ es α-admisible con respecto a I si

1. $c \in \mathbb{R}$
2. Γ es invariante con respecto a todas las deformaciones que fijan
$$E \backslash I^{-1}([c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}])$$
para algún $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \bar{\varepsilon} < \alpha$.

A continuación se resume la demostración del TPM clásico con el siguiente esquema de pasos.

1. Se muestra que para todo funcional $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ que satisface (PS), dados $c \in \mathbb{R}$ y $\bar{\varepsilon} > 0$, se tiene la siguiente alternativa exclusiva: **o** existe un punto crítico al nivel c para el funcional I **o** el subnivel $I^{c+\varepsilon}$ se deforma en el subnivel $I^{c-\varepsilon}$, para cierto $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño ($\varepsilon < \bar{\varepsilon}$). Esto se conoce como el *Lema* o *Teorema de Deformación*
2. Se muestra que si una clase de minimax es α-admisible con respecto a un funcional I que satisface (PS), entonces éste posee un punto crítico al nivel de minimax c. Esto se conoce como el *Principio de Minimax clásico* y se demuestra por reducción al absurdo suponiendo que no existe tal punto, lo que lleva a una contradicción con las características de la deformación existente desde un principio, gracias a la alternativa mencionada en el primer paso.
3. Se construye una clase de minimax para el funcional I. Utilizando las hipótesis de geometría del mismo y el hecho de que $I(0) = 0$, se prueba que dicha clase es α-admisible, lo que implica, gracias al segundo paso, la existencia del punto crítico.

2.2 Aplicaciones del TPM clásico

La principal aplicación que posee el TPM clásico es como herramienta para garantizar la existencia de soluciones débiles de ecuaciones diferenciales parciales semilineales y elípticas. De hecho, fue con la motivación de encontrar soluciones de dichos problemas semilineales que Ambrosetti y Rabinowitz lo estudiaron en primer lugar. Uno de los problemas tipo que se puede resolver con esta metodología se presenta a continuación.

Considérense $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado para $n \geq 3$, $q \in L^\infty(\Omega)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y el problema de hallar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que resuelva

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Se dice que u es solución débil del problema (1) si

1. $u \in H_0^1(\Omega)$, y
2. $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x)uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx,$
$\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

El procedimiento variacional para la solución de esta EDP consiste en encontrar un funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable para el cual

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x)uv \, dx - \int_\Omega fv \, dx;$$

una vez logrado esto, basta probar que I posee un punto crítico para obtener la existencia de la solución débil deseada. Si $F(t) = \int_0^t f(s) \, ds$, entonces se puede probar que el funcional

$$I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)u^2 \, dx - \int_\Omega F(u) \, dx,$$

posee tal derivada precisamente. Si se consideran las siguientes hipótesis, se puede emplear TPM clásico para garantizar la existencia del punto crítico.

Hipótesis

h_1: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado y $q(x) \geq 0$ c.t.p $x \in \Omega$.

h_2: f es continua y existen $p \in]2, 2^*[$ y $K > 0$ tales que
$$|f(t)| \leq K(|t|^{p-1} + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R}^1.$$

h_3: $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 0.$

h_4: Existen $M > 0$ y $\mu > 2$ tales que si $|t| \geq M$, $f(t)t \geq \mu F(t)$.

h_5: Existe $t_0 \in \mathbb{R}$ con $|t_0| \geq M$ tal que $F(t_0) > 0$.

El detalle de cómo utilizar tales hipótesis para probar que el funcional I posee geometría de paso de montaña y para demostrar que satisface (PS) se puede encontrar descrito por Badiale y Serra (2011).

Las aplicaciones del TPM clásico no se reducen a este tipo de problemas; de hecho, son numerosas y frecuentes en la investigación contemporánea, cuestión que hace imposible detallarlas en su totalidad; el lector interesado puede dirigirse a Ambrosetti (1992), Ambrosetti y Malchiodi (2007), Ambrosetti y Rabinowitz (1973), Badiale y Serra (2011), Evans (2010), Jabri (2003) o Rabinowitz (1986).

[1] $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ es el exponente crítico de la inyección de $H^1(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$

2.3 Estructura de la demostración del TPM topológico

Para presentar el esquema de demostración del TPM topológico son necesarias una serie de definiciones.

Definición 2.6 (Familia topológicamente admisible)**.** Sea X un espacio topológico compactamente conexo; sean $x_1, x_2 \in X$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. La familia de conjuntos (clase de minimax)

$$\Gamma = \{\Sigma \subset X \mid \Sigma \text{ es conexo, compacto y } x_1, x_2 \in \Sigma\},$$

con nivel de minimax

$$c = \inf_{\Sigma\in\Gamma} \max_{x\in\Sigma} f(x),$$

se dice topológicamente admisible con respecto a f si

1. $c > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$;
2. Existe $B \in \Gamma$ tal que $\max_{x\in B} f(x) = c$.

Observación 2.2. Téngase en cuenta que, gracias a que se define en un espacio compactamente conexo, $\Gamma \neq \varnothing$. Además, la primera propiedad garantiza que $c \in \mathbb{R}$.

Análogamente a lo expuesto para el TPM clásico, se puede resumir la demostración del TPM topológico con un esquema de pasos.

1. Se muestra que todo subconjunto abierto y conexo C de todo espacio topológico X compactamente conexo, localmente conexo y localmente compacto, es también compactamente conexo (Katriel, 1994).

2. Se muestra que si X es compactamente conexo, localmente conexo y localmente compacto y la familia Γ (de los conjuntos conexos y compactos que contienen a x_1 y x_2) es topológicamente admisible, entonces un funcional continuo f posee un punto de mínimo local o un punto de paso de montaña al nivel de minimax c. Esto se conoce como *Principio de Minimax Topológico* y se obtiene suponiendo lo contrario, lo que lleva a encontrar un conjunto en la familia que contradice las características de ésta; proceso donde se utiliza lo mostrado en el primer paso.

3. Se prueba, utilizando las hipótesis *1.* y *2.* del TPM topológico y el crecimiento al infinito sobre el funcional, que la familia es topológicamente admisible para dicho funcional, lo que implica que exista el punto de mínimo o punto de paso de montaña, gracias al segundo paso.

2.4 Aplicaciones del TPM topológico

La mayoría de las aplicaciones del TPM topológico, y todas las que se presentan en esta sección, se pueden encontrar descritas por Katriel (1994) en el artículo en el que por primera vez introduce el teorema. En dichas aplicaciones se usa la siguiente versión del TPM a manera de corolario.

Corolario 2.1 (Katriel, 1994)**.** *Sean X un espacio topológico, localmente conexo y compactamente conexo, y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente al infinito. Si x_1 y x_2 son mínimos locales estrictos de f, entonces existe $x_3 \in X$ que es un mínimo local o un punto global de paso de montaña de f, con $f(x_3) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$.*

El principal teorema de aplicación del TPM topológico es el siguiente teorema de homeomorfismos.

Teorema 2.1. *Sean X e Y dos espacios topológicos, Y conexo y X localmente compacto y compactamente conexo. Entonces una de las dos siguientes alternativas se sigue:*

(I) Toda función $f : Y \to \mathbb{R}$ continua y creciente al infinito tiene un número infinito de mínimos locales o un punto local de paso de montaña (o ambas).

(II) Todo homeomorfismo local propio [2] $F : X \to Y$ es un homeomorfismo global

Como para todo teorema de alternativa exclusiva, en este caso existen dos tipos de aplicaciones: por un lado si se tienen dos espacios X e Y que satisfacen las hipótesis del teorema y se pudiera encontrar una función $f : Y \to \mathbb{R}$ continua y creciente al infinito tal que sólo posee un número finito de mínimos locales y ningún punto de paso de montaña entonces se sabe que todo homeomorfismo local propio entre X e Y es homeomorfismo global. Por otro lado si se encuentra un homeomorfismo local propio $F : X \to Y$ que no sea homeomorfismo global entonces se sabría que cualquier función continua creciente al infinito $f : Y \to \mathbb{R}$ tendría infinitos mínimos locales o al menos un punto local de paso de montaña.

Para descargar un poco la terminología, considérese la siguiente definición.

Definición 2.7 (Función y espacio simple)**.** Una función $f : Y \to \mathbb{R}$ continua y creciente al infinito y que posee únicamente un número finito de mínimos locales y ningún punto local de paso de montaña es llamada función simple. El espacio topológico Y que admite alguna función simple es llamado espacio simple.

Tomando en cuenta esta definición, se desprende directamente del Teorema 2.1 el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Si X es un espacio topológico localmente conexo y compactamente conexo y Y es un espacio simple y conexo, entonces cualquier homeomorfismo local propio $F : X \to Y$ es un homeomorfismo global.*

A continuación se presenta el detalle de algunos resultados que se obtienen directamente de este teorema.

Corolario 2.2. *Todo homeomorfismo local propio de $\mathbb{R}^n$ en si mismo es un homeomorfismo global.*

Demostración. Para aplicar el teorema precedente, sea $X = Y = \mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo, compactamente conexo y conexo, entonces si se prueba que es simple, el resultado se sigue. Para ello se debe hallar al menos una función

[2] Si X e Y son dos espacios topológicos, una aplicación $F : X \to Y$ es llamada propia si para todo conjunto compacto $K \subset Y$, $F^{-1}(K)$ es compacto en X.

simple en $\mathbb{R}^n$. La función

$$f: \mathbb{R}^n \to R$$
$$x \mapsto \|x\|$$

es simple. En efecto, la norma euclídea es continua y coerciva, propiedad que implica que es creciente al infinito al estar en dimensión finita (se probará esta afirmación más adelante). Además dado cualquier vector no nulo en $\mathbb{R}^n$ siempre se puede encontrar uno con norma más pequeña, implicando esto que el único punto de mínimo es el mínimo global $x = 0$. Lo único que hace falta ver es que f no posee punto locales de paso de montaña: para ello tómese $x \in \mathbb{R}^n$ y M una vecindad de x. El objetivo es mostrar que existe $N \subset M$ vecindad de x que hace que $\{y \mid f(y) < f(x)\} \cap N$ sea conexo: se tiene por un lado que

$$\{y \mid f(y) < f(x)\} = \{y \mid \|y\| < \|x\|\} = B_{\|x\|}(0),$$

es la bola abierta de centro cero y radio $\|x\|$. Como M es abierto se sabe que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset M$. Tomando $N = B_\delta(x)$, que es claramente vecindad de x, se tiene lo buscado ya que $B_{\|x\|}(0) \cap B_\delta(x)$ es conexo al ser intersección de dos bolas abiertas en el espacio euclídeo. Un ejemplo en dos dimensiones es presentado en la Figura 1. □

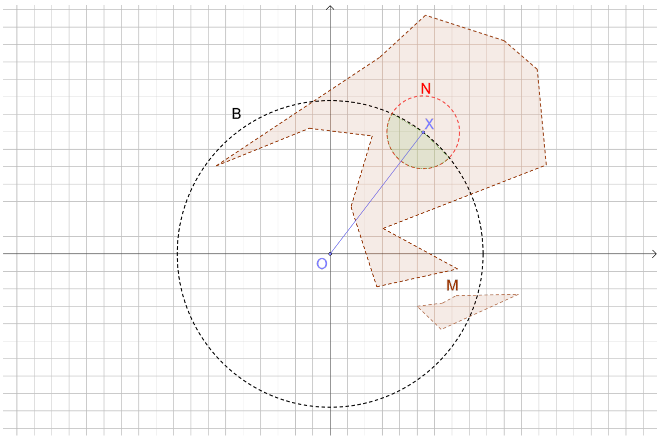

Figura 1: Ejemplo de la demostración del Corolario 2.2. Aquí M, en marrón, es una vecindad abierta de x que en general podría ser disconexa y $B = \{y \mid f(y) < f(x)\} = B_{\|x\|}(0)$. En verde se presenta la intersección conexa buscada.

Con argumentos análogos se puede probar el siguiente corolario.

Corolario 2.3. *Todo homeomorfismo local de S^n en si mismo es un homeomorfismo global siempre que $n \geq 2$.*

Ninguno de los dos resultados precedentes es nuevo, sin embargo para el caso del segundo la prueba usual (Spanier, 1966) está basada en el hecho de que S^n es simplemente conexo para $n > 1$, cuestión mucho más difícil de probar que la existencia de una función simple. En el caso del Corolario 2.2, se ha realizado la demostración en detalle, usando las sugerencias dadas por Katriel (1994).

El segundo tipo de aplicación del Teorema 2.1 se presenta a continuación.

Teorema 2.3 (Katriel, 1994)**.** *Sea W un espacio topológico compactamente conexo y localmente conexo. Sea $X = S^1 \times W$. Entonces toda función $f : X \to \mathbb{R}$ continua y creciente al infinito posee un número infinito de mínimos locales o un punto de paso de montaña (o ambos)*

Como ejemplo tómese $X = T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ (n veces). En específico T^2, el clásico toro. Con $X = S^1 \times T^{n-1}$, el teorema se aplica y se concluye que toda función continua (como X es compacto toda función es creciente al infinito) $f : T^n \to \mathbb{R}$ posee un número infinito de mínimos locales o un punto de PM. Esto deja un problema abierto: si uno encontrase una función continua desde el toro a los reales sin puntos locales de PM, podría afirmar que toda función real continua definida en el toro posee un número infinito de mínimos locales; de igual forma si se encontrase una función continua con un número finito de mínimos locales se podría aseverar que toda función continua definida en el toro posee necesariamente al menos un punto de paso de montaña.

Observación 2.3. Como se puede apreciar, las aplicaciones del TPM topológico son meramente útiles en la propia topología, en especial en aquella referente a las superficies compactas y conexas de los espacios euclídeos, algo que se suele llamar aplicaciones teóricas. Usando el Teorema de alternativa (Teorema 2.1), que es bastante general, Katriel (1994) brinda algunas aplicaciones más en el estilo ya mostrado, para conjuntos tan simples como las bolas cerradas o tan complejos como el plano proyectivo. No se ha encontrado en la literatura aplicaciones más prácticas.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1 Aplicaciones en común de los teoremas de paso de montaña: el TPM en dimensión finita

Se puede inferir por lo expuesto por Ambrosetti y Rabinowitz (1973) la clara motivación en su afán de demostrar el TPM clásico: asegurar la existencia de soluciones débiles de EDPs semilineales elípticas. Por otro lado, Katriel (1994) buscaba probar teoremas de homeomorfismos, cuestión que resulta de gran importancia en la Topología General. Después de estudiarse ambas aplicaciones puede decirse que no poseen ninguna relación a simple vista. Sin embargo, resulta que existe otra aplicación de connotada relevancia que surge como uno de los puntos en común que se pueden encontrar para ambos contextos del TPM; esta aplicación es un teorema, en Teoría de Puntos Críticos en dimensión finita, que fue demostrado por primera vez por Courant (1950). Este teorema, que hoy se conoce como Teorema de Paso de Montaña *en dimensión finita*, puede considerarse la primera aproximación al tipo de demostración que poseen las otras dos versiones.

A continuación se presenta su enunciado. Struwe (2008) presenta una demostración asequible. La siguiente definición es necesaria.

Definición 3.1 (Función coerciva)**.** Una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se dice coerciva si

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

o en otras palabras, si

$$(\forall M>0)\ \ (\exists R>0) \text{ tal que } \forall x\in\mathbb{R}^n,$$
$$\|x\|>R \Rightarrow f(x)>M.$$

Teorema 3.1 (Teorema de Paso de Montaña en dimensión finita)**.** *Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ un funcional continuamente diferenciable (C^1) y coercivo. Si f tiene dos mínimos locales estrictos x_1 y x_2, entonces tiene un tercer punto crítico x_3 tal que*

$$f(x_3)>\text{máx}\{f(x_1),f(x_2)\}.$$

Uno de los resultados más importantes de esta investigación es el hecho de que el TPM en dimensión finita es un corolario tanto del TPM clásico como del topológico, brindando así ese primer punto de encuentro entre los dos teoremas que puede hacer surgir cuestiones interesantes sobre las posibles relaciones teóricas y lógicas que puedan poseer y que se describen más adelante. A continuación se evidencia lo expuesto, a través de dos demostraciones originales.

Teorema 3.1 vía TPM clásico

Demostración. Sin pérdida de generalidad asúmase que $f(x_1)\geq f(x_2)$. Para poder aplicar el TPM clásico, es necesario definir el siguiente funcional:

$$\begin{aligned} g:\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto g(x)=f(x+x_1)-f(x_1).\end{aligned}$$

Por construcción, $g(0)=0$. Es preciso mostrar que 0 y x_2-x_1 son mínimos locales de g. Para el caso de 0, se debe hallar $\delta_1>0$ tal que para todo $x\in B_{\delta_1}(0)\backslash\{0\}$, $g(x)>g(0)$. Como x_1 es mínimo local de f, entonces existe δ tal que si $x\in B_\delta(x_1)\backslash\{x_1\}$ entonces $f(x)>f(x_1)$. Si se toma $\delta_1=\delta$, entonces, sea $x\in B_{\delta_1}(0)\backslash\{0\}$, o sea $\|x\|<\delta_1$, es decir $\|x+x_1-x_1\|<\delta$, que implica, al ser $x+x_1\neq x_1$, $f(x+x_1)>f(x_1)$. Con ello

$$\begin{aligned} g(x)&=f(x+x_1)-f(x_1)\\ &>0\\ &=g(0).\end{aligned}$$

Ahora, para el caso de x_2-x_1 es preciso mostrar que existe $\delta_2>0$ tal que para todo $x\in B_{\delta_2}(x_2-x_1)\backslash\{x_2-x_1\}$, $g(x)>g(x_2-x_1)$. Como x_2 es mínimo local de f, entonces existe δ_0 tal que si $x\in B_{\delta_0}(x_2)\backslash\{x_2\}$ entonces $f(x)>f(x_2)$. Si se toma $\delta_2=\delta_0$, entonces, sea $x\in B_{\delta_2}(x_2-x_1)\backslash\{x_2-x_1\}$, es decir $\|x-(x_2-x_1)\|<\delta_2$, o sea $\|x+x_1-x_2\|<\delta_0$, que implica al ser $x+x_1\neq x_2$, $f(x+x_1)>f(x_2)$. Con ello

$$\begin{aligned} g(x)&=f(x+x_1)-f(x_1)\\ &>f(x_2)-f(x_1)\\ &=g(x_2-x_1).\end{aligned}$$

Como para todo $0<\tilde{\delta}<\delta_1$, si $\|x\|=\tilde{\delta}$, $g(x)=\alpha>0$ y como $g(x_2-x_1)=f(x_2)-f(x_1)\leq 0$, en el contexto de la geometría de paso de montaña, basta tomar como ρ a cualquier $\tilde{\delta}$ positivo lo suficientemente pequeño para ser menor que δ_1 y $\|x_2-x_1\|$ al mismo tiempo, cosa que es posible ya que $\|x_2-x_1\|>0$. Luego, con $v=x_2-x_1$, se tiene que el funcional g cumple con las proposiciones de la geometría de paso de montaña del TPM clásico. Ahora se necesita probar que g satisface (PS). Para ello, como ya se verá, basta evidenciar que g es coerciva. En primer lugar, se verifica que $h(x)=f(x+x_1)$ es coerciva, es decir

$$(\forall M>0)\ \ (\exists R>0) \text{ tal que } \forall x\in\mathbb{R}^n,$$
$$\|x\|>R\Rightarrow h(x)>M.$$

Sea $M>0$. Si $x_1=0$ no habría nada que probar, así que se asume $x_1\neq 0$, con lo cual $\|-x_1\|>0$. Como f es coerciva, existe $R_1>0$ tal que para todo $x\in\mathbb{R}^n$ tal que $\|x\|>R_1$, se tiene que $f(x)>M$. Sea $R=R_1+\|-x_1\|$ y tómese $x\in\mathbb{R}^n$ tal que $\|x\|>R$. Así,

$$\|x+x_1\|=\|x-(-x_1)\|\geq\|x\|-\|-x_1\|>R_1,$$

con lo cual $f(x+x_1)=h(x)>M$.
Se necesita ahora que para todo $c\in\mathbb{R}$, $h(x)+c$ sea coerciva, es decir

$$(\forall M>0)\ \ (\exists R>0) \text{ tal que } \forall x\in\mathbb{R}^n,$$
$$\|x\|>R\Rightarrow h(x)+c>M.$$

Sea $M>0$. Si $c<M$, entonces $M-c>0$, y como h es coerciva existe $R_1>0$ tal que para todo $x\in\mathbb{R}^n$ tal que $\|x\|>R_1$ se tiene que $h(x)>M-c$, es decir $h(x)+c>M$; Basta tomar $R=R_1$. Si es que $c\geq M$, entonces $c>\dfrac{M}{2}$; se toma nuevamente $R=R_1$ y así, cuando $\|x\|>R$,

$$h(x)+c>h(x)+\frac{M}{2}>\frac{M}{2}+\frac{M}{2}=M.$$

De esta forma y tomando $c=-f(x_1)$, se tiene que $g(x)$ es una función coerciva. A continuación, uno de los más interesantes resultados de este trabajo: que la coercividad implica el cumplimiento de (PS) para un funcional en dimensión finita.
Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Palais-Smale, es decir,

$$(g(x_n))_n \text{ es acotada } \text{ y } g'(x_n)\to 0.$$

En primer lugar, se puede mostrar que $(x_n)_n$ es acotada: en efecto si esto no fuera cierto y la sucesión fuera no acotada, se tendría la existencia de una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente al infinito, es decir $\left\|x_{n_k}\right\|\to+\infty$ cuando $k\to+\infty$, lo que a su vez implicaría, gracias a la coercividad de g, que $g(x_{n_k})\to+\infty$. Sin embargo esto contradice la acotación de $(g(x_{n_k}))_k$ que proviene de la acotación de $(g(x_n))_n$. En consecuencia $(x_n)_n$ debe ser acotada y al encontrarse en un espacio euclídeo de dimensión finita, poseer una subsucesión acotada, debido al Teorema de Bolzano-Weierstrass, obteniéndose (PS). Aplicando el TPM clásico se llega a la conclusión de que g posee un punto crítico, dígase x_0, tal que $g(x_0)>0$. Claramente,

$$g'(x)=f'(x+x_1).$$

Como $g'(x_0)=0$, es fácil probar que $x_3=x_0+x_1$ es un punto crítico de f, pues

$$f'(x_0+x_1)=g'(x_0)=0.$$

Además

$$\begin{aligned} f(x_3) &= f(x_0 + x_1) \\ &= g(x_0) + f(x_1) \\ &> f(x_1) \end{aligned}$$

por el hecho de que $g(x_0) > 0$. Esto completa la demostración. $\square$

Teorema 3.1 vía TPM topológico

Demostración. $\mathbb{R}^n$ es un espacio topológico regular, localmente conexo y compactamente conexo. Es preciso mostrar que f es creciente al infinito dado que es coerciva.
Sea $x \in \mathbb{R}^n$; el objetivo es mostrar que existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, tal que para todo $z \notin K$ se tiene $f(z) > f(x)$. Procediendo por contradicción se tiene la siguiente proposición:

$$\forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto}, \exists z \notin K \text{ tal que } f(z) \leq f(x).$$

Sea $\delta > 0$; en dimensión finita el conjunto $B = \overline{B_\delta(0)}$ es compacto, por lo cual existe $z \notin B$ tal que $f(z) \leq f(x)$. Como $z \notin B$ entonces $\|z\| > \delta$, y por lo tanto se ha probado que

$$(\forall \delta > 0) \ \ (\exists z_\delta \in \mathbb{R}^n) \text{ tal que } (\|z_\delta\| > \delta \wedge f(z_\delta) \leq f(x)).$$

Así, como $1 > 0$, existe $z_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z_1\| > 1$ y $f(z_1) \leq f(x)$. Se conjetura que existe $z_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z_2\| > 2$, $\|z_2\| \geq \|z_1\|$ y $f(z_2) \leq f(x)$. Para probar esto, por contradicción se asume que para todo $z \in \mathbb{R}^n$, $\|z\| \leq 2$ o $\|z\| < \|z_1\|$ o $f(z_2) > f(x)$. Como $2 > 0$, entonces existe $z_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z_2\| > 2$ y $f(z_2) \leq f(x)$; lo que implicaría que $\|z_2\| < \|z_1\|$; a su vez se tendría obligadamente que $\|z_1\| \leq 2$, brindando la contradicción $2 < \|z_2\| < \|z_1\| \leq 2$. Procediendo por inducción es posible encontrar la sucesión $(z_n)_n$ en $\mathbb{R}^n$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|z_n\| > n$, $\|z_n\| \geq \|z_{n-1}\|$ y $f(z_n) \leq f(x)$. La sucesión de normas es creciente y no acotada y por lo tanto diverge a infinito ($\|z_n\| \to +\infty$). La coercividad de f implicaría que $f(z_n) \to +\infty$, cuestión que contradice que $f(z_n) < f(x) < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma se prueba que f es creciente al infinito, siendo vital que el espacio sea de dimensión finita.
Utilizando el Corolario 2.1 del TPM topológico se asegura la existencia de un vector $x_3 \in \mathbb{R}^n$ que es un punto mínimo o punto global de paso de montaña con la propiedad que $f(x_3) > \text{máx}\{f(x_1), f(x_2)\}$. En caso de que fuera un punto mínimo es claro que se trata de un punto crítico. ¿Qué pasa en el caso de que sea un punto global de PM? Katriel (1994) demuestra con argumentos topológico-diferenciales, lo siguiente.

Lema 3.1 (Katriel, 1994)**.** *Si X es un espacio de Banach, $U \subset X$ es abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ es C^1 y $x \in U$ es tal que $f'(x) \neq 0$, entonces existe una bola abierta $B \subset X$ con centro en 0, un difeomorfismo $H : B \to H(B) \in U$ con $H(0) = x$ y un funcional lineal L en X tal que $f(H(w)) = L(w) + f(x)$ para $w \in B$. De hecho se puede escoger $L = f'(x)$ y H tal que $H'(0) = I$, donde I es la función identidad en X.*

Este lema muestra que cerca de un punto regular, es decir un punto que no es crítico, una función suave se ve topológicamente como una función lineal no trivial. Sin embargo, como las funciones lineales no poseen puntos de PM (Katriel,1994), entonces se tiene que un punto regular no puede ser de PM. Por lo tanto todo punto de PM debe ser necesariamente un punto crítico.
Así se llega a la conclusión de que el TPM topológico implica el TPM en dimensión finita. $\square$

3.2 Elementos teóricos en común de la estructura de demostración de las distintas variantes del TPM

Si se toman en cuenta las tres últimas hipótesis del TPM clásico: que I es tal que $I(0) = 0$ y la existencia de ρ y α tales que satisfacen *1.* y *2.* (la geometría de paso de montaña), puede verse (como muestra el esquema de demostración) que éstas son las responsables de que exista una clase de minimax $\alpha-$admisible. De hecho, es posible probar (Rabinowitz, 1986) que dicha clase es

$$\Gamma_1 = \{\Sigma \in E \ | \ \Sigma \text{ es compacto y conexo con } 0, v \in \Sigma\},$$

clase análoga a la del TPM topológico, es decir,

$$\Gamma_2 = \{\Sigma \in X \ | \ \Sigma \text{ es compacto y conexo con } x_1, x_2 \in \Sigma\},$$

cuya admisibilidad topológica se obtiene gracias a las tres últimas hipótesis de dicho caso: que f es creciente al infinito y que existen $x_1, x_2 \in X$ y $S \subset X$ que satisfacen las condiciones *1.* y *2.* (del TPM topológico, evidentemente). Una vez obtenidas estas admisibilidades en su respectivo contexto, son los *Principios de Minimax* (paso 2 de cada esquema de demostración) de cada caso los que garantizan en realidad la existencia de los puntos críticos (o puntos de mínimo o puntos de PM).

Esto evidencia que en ambas versiones del TPM sus hipótesis pueden ser separadas en dos grupos: hipótesis de estructura del espacio e hipótesis geométricas del funcional. Éstas últimas hacen referencia a aquellas 'tres últimas hipótesis' que sirven para que las clases de minimax sean admisibles en su contexto. Por otro lado las hipótesis de estructura del espacio son las que determinan que exista el punto crítico (o mínimo local o punto de PM) al actuar sobre estas clases admisibles; en el teorema clásico, la estructura está dada por el hecho de que el espacio sea de Banach y que $I \in C^1(\Omega)$ satisfaga (PS). En el caso topológico, la estructura se encuentra dada por las propiedades de conexidad local, compacidad local y conexidad compacta de f más el hecho de que $f \in C(X)$.

Con respecto a los puntos cuya existencia garantizan los teoremas, a parte de poder mostrar que se alcanzan a un nivel en una clase de minimax muy parecida, existe una relación muy interesante: por un lado, y como ya se vio, todo punto de paso de montaña en un espacio dotado de estructura diferencial es un punto crítico (y obviamente todo punto de mínimo lo es), pero por si esto fuera poco el punto crítico cuya existencia asegura el TPM clásico es un punto de mínimo local o un punto de paso de montaña (Struwe, 2008). Esto implica que ambos teoremas brindan la existencia de la misma clase de punto: un punto de mínimo o un punto de paso de montaña.

Es interesante, por otro lado, que la demostración de estos principios se haga por el método indirecto de reducción al absurdo, siendo la contradicción exactamente la misma: encontrar un conjunto en la clase de minimax que contradice la definición del nivel de minimax: en el caso clásico esto es gracias al Teorema de Deformación y en el topológico se debe a propiedades topológias exclusivamente, como se advierte en los esquemas de demostración (paso 1).

En base a esta estructura análoga de los teoremas se vuelve interesante investigar si hay contextos en los cuáles resultan relacionadas las dos versiones en el sentido lógico, es decir responder las preguntas ¿implica el TPM clásico al TPM topológico? o ¿implica el TPM topológico al TPM clásico?

3.3 Relaciones lógicas

Para poder iniciar la comparación de hipótesis de las dos versiones del teorema, que permitirían responder los cuestionamientos del final de la sección anterior, en primer lugar es necesario poner a éstas en el mismo contexto estructural, es decir, hacer del espacio topológico X un espacio de Banach E, e introducir la hipótesis de diferenciabilidad continua en la función f. Una vez allí salta a la vista la incompatibilidad de las hipótesis debido al siguiente resultado atribuido usualmente a Augustin Louis Cauchy y cuya demostración se puede encontrar en Köthe (1969).

Teorema 3.2. *Sea X un espacio vectorial topológico. X es localmente compacto si y solo si X es de dimensión finita.*

La razón por la cual este resultado es un impedimento en el afán de conectar los teoremas se detalla a continuación.

En primer lugar si se quiere utilizar el TPM clásico para mostrar el topológico, se debe buscar que las hipótesis de éste último impliquen las del primero; sin embargo, una de aquellas es que la función continua f es creciente al infinito, lo que a su vez implica que el espacio es de dimensión finita, cuestión no contradictoria pero que reduce notablemente el marco referencial al cual se pretende llevar la comparación.

Si por otro lado se desea utilizar el TPM topológico para mostrar el clásico, al momento de asumir que el funcional I satisface (PS) y buscar que sea además creciente al infinito, se tiene una contradicción puesto que si lo fuese, el espacio debería ser de dimensión finita, cuestión que no necesariamente es verdad, entre otras cosas porque si existen funcionales que satisfacen (PS) definidos en espacios de dimensión infinita como aquel que se expuso en la sección de las aplicaciones del TPM clásico (definido en $H_0^1(\Omega)$).

¿Qué pasaría sin embargo si para comparar las hipótesis se restringen los teoremas al caso en dimensión finita, en dónde es irrelevante el teorema de Cauchy?

3.3.1 ¿El TPM clásico implica al TPM topológico?

Con la salvedad de estar trabajando en $X = E = \mathbb{R}^n$, donde la conexidad local y compacta así como la compacidad local se tienen por descontado, si se verifican las hipótesis del TPM topológico, el objetivo es ver hasta qué punto las hipótesis del TPM clásico se cumplen, para así poder aplicarlo y al obtener un punto crítico que es un mínimo o punto de PM, demostrar el TPM topológico. Sin embargo, ese procedimiento no es posible en general, como muestra el siguiente contraejemplo. Considérese la función

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -e^{-(x+2)^2/2} - e^{-(x-2)^2/8} \end{aligned}$$

El primer punto de mínimo local de esta función es $x_1 \approx -1{,}99452$ con imagen $y_1 \approx -1{,}00034$. Con lo cual, la traslación

$$f(x) = g(x + x_1) - y_1$$

posee un punto de mínimo en 0 y $f(0) = 0$. Además $\sup\limits_{\mathbb{R}} f = -y_1$.

Como se muestra en la Figura 2 , f posee dos mínimos locales, lo que implica que satisface las hipótesis geométricas del TPM topológico, porque además es creciente al infinito; para ver esto, considérese que si $x \in [-6, 6]$ si se toma $K = [-6, 6]$, entonces para cualquier $z \notin K$ se tiene que $f(z) > f(x)$. Si $x < -6$ o $x > 6$ basta tomar $K = [x, -x]$ o $K = [-x, x]$ respectivamente para obtener el resultado. Así, esta función satisface todos lo requerimientos del TPM topológico y de hecho también las hipótesis geométricas del TPM clásico (ya que posee un mínimo estricto en 0 y $f(0) = 0$ y tiene otro punto de mínimo con imagen menor a cero). Por otro lado, es claro que el funcional es continuamente diferenciable. Sin embargo f no satisface (PS) como se muestra a continuación. La sucesión $(x_k)_k$ definida por $x_k = k$ es de Palais-Smale para f, pues $(f(x_k))_k$ es acotada (de hecho $\lim\limits_{k \to +\infty} f(x_k) = -y_1$) y además $\lim\limits_{k \to +\infty} f'(x_k) = 0$ (para ver esto sólo hace falta darse cuenta que f no es mas que una función gaussiana bimodal invertida y trasladada); sin embargo, dicha sucesión no posee una sucesión convergente pues $x_k \to +\infty$. Así que el cumplimiento de las hipótesis del Teorema topológico no necesariamente implica el cumplimiento de las hipótesis del TPM clásico.

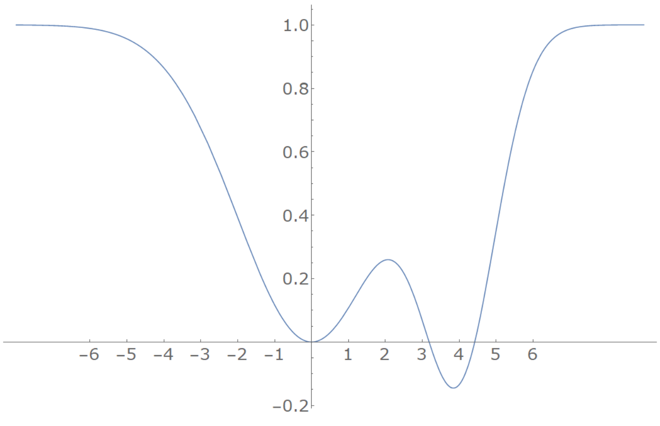

Figura 2: Gráfica de la función f de fórmula $f(x) = -e^{-(x+x_1+2)^2/2} - e^{-(x+x_1-2)^2/8} - y_1$, donde se aprecia como ésta cumple con las hipótesis del TPM topológico.

3.3.2 ¿El TPM topológico implica al TPM clásico?

Suena razonable y tentadora la posibilidad de probar que el TPM topológico es una generalización del TPM clásico para espacios de Banach. Nuevamente, en el caso finito dimensional, donde todas las condiciones de espacio topológico (conexidad local, compacidad local, y conexidad compacta) se cumplen, si se suponen satisfechas todas las hipótesis del TPM clásico, ¿hasta qué punto se cumplen las hipótesis del TPM topológico con el fin de aplicarlo? Para empezar, es interesante que las hipótesis geométricas clásicas si impliquen las hipótesis geométricas topológicas pues $S = \partial\overline{B_\rho(0)}$ separa a 0 y v y $p = \inf_{u\in S} I(u) \geq \alpha \geq \max\{I(0), I(v)\}$. Sin embargo, la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 - \cos(x), \end{aligned}$$

que al tener un mínimo en 0 y otro en 2π satisface las hipótesis geométricas (pues $f(0) = 0$), es una función continuamente diferenciable que satisface (PS) pero no es creciente al infinito. Para verificar que satisface (PS), supóngase que $(x_k)_k \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de Palais-Smale para f, es decir, las sucesión $(f_k)_k$ es acotada y la sucesión $(f'(x_k))_k$ converge a cero. Esto último implica que

$$\sin(x_k) \to 0,$$

que por continuidad implica que

$$x_k \to \arcsin(0) = 0,$$

brindando la convergencia de la arbitraria sucesión $(x_k)_k$, que prueba lo buscado.

Para probar que f no es creciente al infinito basta probar que existe algún número real x tal que para todo $K \subset \mathbb{R}$ compacto exista un número real $z \notin K$ tal que $f(z) \leq f(x)$. Sea $x = \pi$ y sea un compacto $K \subset \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo. Como K es compacto, entonces es acotado, es decir, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $y \leq C$ para todo $y \in K$. Ahora, gracias a la propiedad arquimediana de los números reales, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\pi > C$, con lo cual $n\pi \notin K$; si se toma $z = n\pi$, entonces

$$f(z) = f(n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 2 & \text{si } n \text{ es impar;} \end{cases}$$

en cualquier caso,

$$f(z) \leq 2 = f(\pi) = f(x),$$

probando que f no es creciente al infinito, hecho que se puede corroborar también al evidenciar que f es oscilante. Se presenta su gráfica en la Figura 3.

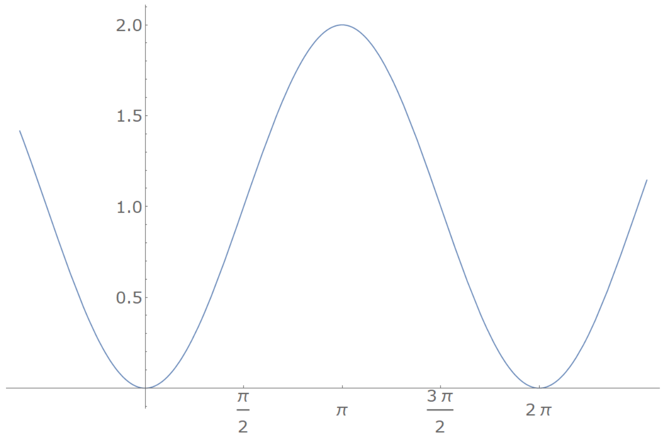

Figura 3: Gráfica de la función f de fórmula $f(x) = 1 - \cos(x)$, donde se aprecia como ésta cumple con las hipótesis geométricas del TPM clásico.

Aunque hubiera resultado de lo más interesante que el teorema topológico fuese una generalización del teorema clásico (aunque sea en un contexto reducido), el hecho de que no lo sea no resulta nada decepcionante porque implica que el TPM en dimensión finita puede ser demostrado a través de dos métodos que son realmente diferentes en fondo: dos maneras independientes de llegar al mismo resultado, que aunque guardan relación estrecha en estructura superficial, representan esquemas de conocimiento de dos ramas de la matemática relativamente alejadas, que utilizan sus propios conceptos y definiciones de manera idónea para lograr sus propios objetivos (aplicaciones de uno y otro) y que, *anecdóticamente*, pueden demostrar un teorema de otro ramo.

4. CONCLUSIONES

Independencia lógica

La intención de encontrar relaciones lógicas entre los dos teoremas ha supuesto una tarea sumamente interesante que ha arrojado tal vez el más revelador resultado de este trabajo: que los teoremas estudiados representan dos resultados de naturaleza matemática lógicamente independiente, cuestión que no es trivial pues por sus características estructurales análogas se podía intuir alguna relación en el sentido lógico.

Como se ha advertido, la independencia lógica de ambos resultados posee interés teórico al momento de estudiar su contexto de demostraciones sumamente parecidas, pero asimismo se puede encontrar un interés práctico al saber que en el contexto de la teoría de puntos críticos en dimensión finita se cuenta con dos herramientas distintas para resolver problemas específicos en la búsqueda de dichos puntos.

Hipótesis principal

En la estructura de la demostración del TPM clásico la condición de Palais-Smale (PS) impuesta sobre el funcional resulta un pilar fundamental en la búsqueda del punto crítico. De igual manera en la estructura de la demostración del TPM topológico el crecimiento al infinito es de esencial relevancia para encontrar el punto de mínimo o punto de paso de montaña. Aunque en el primer caso la condición (PS) —como hipótesis de estructura— es necesaria en el Principio de Minimax correspondiente y en el segundo caso el crecimiento al infinito forma parte de las hipótesis geométricas, una vez encuadrados en espacios de dimensión finita (donde se equiparan el resto de hipótesis de estructura del espacio) y si se acomodan los puntos mínimos para que las condiciones geométricas en ambos teoremas sean equivalentes, son únicamente esas dos condiciones las que diferencian a los resultados (siempre que se acepte que la función es continuamente diferenciable en el caso del TPM topológico).

Se ha visto, sin embargo, que dichas hipótesis no son equivalentes con los contraejemplos brindados. Es por eso que resulta natural decir que la hipótesis principal del TPM clásico es el cumplimiento de la condición de Palais-Smale mientras que para el TPM topológico resulta el crecimiento al infinito.

Esencia de las demostraciones

Más allá de la clara relación que guardan los teoremas en su estructura de demostración —relación estrecha en vista de la conexión que tienen las familias de minimax, la utilización de dos puntos del espacio dotados de cierta geometría muy parecida y el procedimiento por reducción al absurdo— y el hecho de que ambos garantizan la existencia de un punto mínimo o punto global de paso de montaña para un funcional, se puede evidenciar que resultan en fondo muy distintas: mientras en el caso clásico todo está construido con el objeto de recurrir al Teorema de Deformación —que a su vez es un resultado que se alimenta de la estructura diferencial del espacio y que es el principio motor del TPM clásico— en el caso topológico, es el sistema de conceptos de la topología general el que por sí solo carga con el peso de la demostración. No quiere decir esto que en el TPM clásico no se utilice la topología sino que ésta se encuentra acompañada de consideraciones diferenciales exclusivas de los espacios de Banach, mientras que en el otro caso la generalidad de las consideraciones topológicas es sumamente amplia.

Aplicaciones incompatibles

La motivación para el descubrimiento del TPM clásico fue la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, cuestión por la cual es célebre; como para tal aplicación los espacios funcionales donde se trabaja son de dimensión infinita, resulta imposible querer usar al TPM topológico en la misma línea de aplicaciones. Esta evidente consideración no es irrelevante ya que la investigación actual en el campo de las EDPs en la búsqueda de generalizaciones del TPM intenta alcanzar resultados de este tipo que no precisen de las hipótesis usuales; algunas, por un lado, tratan de deshacerse de la condición de Palais-Smale, cuestión de la que el TPM topológico carece, por ejemplo. Sin embargo resulta difícil no utilizar dicha hipótesis aunque existen algunos ejemplos (Jabri, 2003).

Por otro lado, en la búsqueda de generalizaciones del TPM clásico podemos citar a Chang (1981) que estudia métodos variacionales para funcionales no diferenciables, utilizados por Arcoya y Calahorrano (1994) con el fin de resolver algunos problemas discontinuos en EDP. Brezis y Nirenberg (1983) empiezan a dar luz sobre la resolución de ecuaciones diferenciales semilineales en el caso del exponente crítico. Se debe mirar también los trabajos de Brezis (1986) y Bahri y Coron (1988). Asimismo, Katriel (1994) presenta una generalización del TPM clásico en espacios métricos. Una generalización a espacios topológicos está por descubrirse aún.

De igual manera resulta bastante complejo interpretar el TPM clásico de tal forma que pueda utilizarse en la búsqueda de aplicaciones en Topología, principalmente porque muchos espacio topológicos (como las superficies conexas y compactas para las cuales el TPM topológico posee resultados) ni siquiera son espacios vectoriales, mucho menos espacios de Banach.

Dimensión finita

La incompatibilidad de las aplicaciones principales de cada uno de los teoremas hace mucho más interesante a la aplicación en común más importante: el TPM en dimensión finita. La forma de demostrarlo usando las otras dos variantes, sección que ha representado una de las partes más interesantes de este trabajo, evidencia como la propiedad de coercividad representa más de lo que se ve a primera vista, siempre y cuando se esté trabajando en dimensión finita.

En ese contexto, es interesante que al querer buscar puntos críticos para funciones que poseen dos puntos de mínimo estricto, se tenga como opción para encontrarlos a la verificación de tres distintas cuestiones, que en uno u otro caso resultarán más o menos fáciles de verificar: la coercividad (la más general porque implica las otras dos), el crecimiento al infinito o la condición (PS). Esto brinda una riqueza única a las técnicas de búsqueda de puntos críticos en dimensión finita.

AGRADECIMIENTOS

El segundo autor agradece a la Escuela Politécnica Nacional por el financiamiento dado a su investigación a través del proyecto PIS 17-01.

REFERENCIAS

Ambrosetti, A. (1992). *Critical points and nonlinear variational problems.* Mémoires de la Société Mathématique de France, Serie 2, No. 49.

Ambrosetti, A. y Malchiodi, A. (2007). *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems* (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press.

Ambrosetti, A. y Rabinowitz, P. (1973). Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis, 14*(4), 349–381. https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7

Arcoya, D. y Calahorrano, M. (1994). Some Discontinuous Problems with a Quasilinear Operator, *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 187* (3), 1059-1072. https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1406

Badiale, M y Serra, E. (2011). *Semilinear elliptic equations for beginners. Existence results via the variational approach*. London, UK: Springer.

Bahri, A. y Coron, J. M. (1988). On a nonlinear elliptic equation involving the critical sobolev exponent: The effect of the topology of the domain. *Communications on Pure and Applied Mathematics, 41* (3), 253-294.

Brezis, H. (1986). Elliptic equations with limiting Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math., 39*, 517-539.

Brezis, H.y Nirenberg, L. (1983). Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents. *Communications on Pure and Applied Mathematics, 36* (4), 437-477. https://doi.org/10.1002/cpa.3160360405

Chang, K. C. (1981). Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 80* (1), 102-129. https://doi.org/10.1016/0022-247X(81)90095-0

Courant, R. (1950). *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*. Heidelberg, Germany: Verlag.

Evans, L. (2010). *Partial differential equations* (2nd ed). Providence, RI, USA: American Mathematical Society.

Jabri, Y. (2003). *The mountain pass theorem. Variants, generalizations and some applications*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Katriel, G. (1994). Mountain pass theorems and global homeomorphism theorems. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 11* (2), 189–209.

Köthe, G. (1969). *Topological vector spaces* (Traducido del alemán por D. J. H. Garling). New York, USA: Springer-Verlag New York Inc.

Rabinowitz, P. (1986). *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations* (CBMS Regional Conference Series in Mathematics) Providence, RI, USA: American Mathematical Society.

Spanier, E. (1966) *Algebraic topology*. New York-Toronto, Ont.-London: McGraw-Hill Book Co.,

Struwe, M. (2008) *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems* (4th ed). Berlin, Germany: Springer-Verlag.

BIOGRAFÍAS

Miguel Alejandro Aguilar Enríquez, obtuvo el Diploma del Bachillerato Internacional (Unidad Educativa Sebastián de Benalcázar, 2012) realizando una monografía sobre las aplicaciones de la Matemática en la Biología. A partir de ese momento supo que quería dedicarse la ciencia formal por excelencia y se graduó de matemático en la Escuela Politécnica Nacional en 2019. Durante su carrera trabajó como ayudante de cátedra en la Facultad de Ciencias y, una vez titulado, se ha desempeñado como Técnico Docente en el Departamento de Matemática de la EPN. Está interesado en el Análisis Matemático, la Topología General, la Literatura de Ciencia Ficción y el Cómic Independiente. Identificador digital ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6398-0446.

Marco Vinicio Calahorrano Recalde, matemático de la Escuela Politécnica Nacional (EPN, 1985), hizo el curso de perfeccionamiento en matemática, bajo la dirección del Prof. Antonio Ambrosetti, en la legendaria e ilustre Scuola Normale Superiore di Pisa (1988-1991). Doctor en matemática (PhD), EPN–2009, con tesis dirigida por L. Boccardo, Universidad La Sapienza. Inicia su trabajo en la EPN en 1981 y actualmente es profesor titular, principal. Desempeñó las funciones de Jefe del Departamento de Matemática, Coordinador de las carreras de Matemática e Ing. Matemática, Subdecano y Decano de la Facultad de Ciencias de la EPN. Se interesa del Análisis no lineal. Identificador digital ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5710-1393.