Semigrupos Dinámicamente Gradiente en un Espacio Métrico

Gavilán, Maruja [1,*]

[1] *Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima, Perú*

Resumen: Estudiamos la dinámica interna de un compacto invariante por medio de distintas nociones: atractor local, repulsor y pareja atractor–repulsor. Se describe la descomposición de Morse (en el sentido de Rybakowski (1987)) y para un atractor global probamos las equivalencias de los conceptos de atractor local y descomposición de Morse dados en los libros de Carvalho et al. (2013) y de Rybakowski (1987). Se presentan los resultados de Aragão et al. (2011) según los cuales existe una equivalencia entre el semigrupo gradiente (admite una función de Lyapunov) y el semigrupo dinámicamente gradiente (en el sentido de Carvalho et al. (2013)). Concluimos presentando la estabilidad de semigrupos gradientes bajo perturbaciones, vía ejemplos ilustrativos.

Palabras claves: Funciones de Lyapunov y estabilidad. Atractores. Repulsores. Semigrupo dinámicamente gradiente

Dinamically Gradient Semigroups in a Metric Space

Abstract: We study the internal dynamics of an invariant compact by using different concepts: local attractor, repeller and “pair attractor-repeller”. The “Decomposition of Morse” (in the sense of Rybakowski (1987)) is described, and on a global attractor we prove the equivalence of the concepts of local attractor and Decomposition of Morse given in the books of Carvalho et al. (2013) and of Rybakowski (1987). The results of Aragão et al. (2011) are presented according to which there exists an equivalence between the gradient semigroup (it has a Lyapunov function) and the dynamically gradient semigroup (in the sense of Carvalho et al. (2013)). We conclude by presenting the stability of gradient semigroups under perturbations, via illustrative examples.

Keywords: Lyapunov functions and stability. Attractors. Repellers. Dinamically Gradient Semigroup.
2020 Mathematics Subject Classification. 37B25 (35B41, 37C70, 37B55, 37L05).

1. Introducción

Los sistemas dinámicos en dimensión infinita abarcan aquellos que en algún sentido son disipativos, por ejemplo, los semigrupos que admiten un atractor global: «un compacto invariante que atrae a todos los conjuntos acotados» (Raugel, 2002; Hale, 2004). En Rybakowski (1987), se exponen dos conceptos útiles en un compacto invariante: atractor local y descomposición de Morse. Ambas nociones fueron reexaminadas en Carvalho et al. (2013), pero en un atractor global. Con el objeto de comparar los resultados de Carvalho et al. (2013) con los de Rybakowski (1987) y así esclarecer el contexto, en el presente trabajo a las definiciones dadas en el libro de Rybakowski se les adiciona el adjetivo «débil» y se prueba su equivalencia cuando el compacto invariante es un atractor global. Las dos equivalencias están en la proposición 2.11 y el teorema 3.4, respectivamente. La tercera – aparece en el teorema 4.13 – es la equivalencia entre el semigrupo gradiente (los que poseen una función de Lyapunov) y el semigrupo dinámicamente gradiente (en el sentido de Carvalho et al. (2013)), tal como se prueba en Aragão et al. (2011). Se estudia finalmente la estabilidad de los semigrupos gradiente, por medio de algunos ejemplos que ilustran el teorema 5.3, demostrado en Carvalho et al. (2013).

*mgavilang@unmsm.edu.pe
Recibido: 12/08/2020
Aceptado: 12/04/2022
Publicado en línea: 25/05/2022
10.33333/rp.vol50n1.05

1.1 Notaciones y definiciones previas

El dominio de las aplicaciones consideradas en este artículo es un espacio métrico (X,d), denotado por X. La topología se construye por medio de la distancia $d: X\times X \to [0,+\infty)$ y haciendo uso de la $\varepsilon-$vecindad abierta generada por cada $\varepsilon>0$ en cualquier subconjunto A de X, la cual viene dada por

$$\mathscr{O}_\varepsilon(A)=\bigcup_{a\in A}\{x\in X:\, d(x,a)<\varepsilon\}=\{x\in X:\, d(x,A)<\varepsilon\},$$

donde $d(x,A)=\operatorname{ínf}\{d(x,a):\, a\in A\}$. Específicamente, una familia $T(\cdot)=\{T(t): t\geq 0\}$ que está formada por funciones continuas de X en X es un **semigrupo** en X, si $T(\cdot)$ satisface las tres condiciones siguientes:

- ⋄ $T(0)=I_X$, donde I_X es la aplicación identidad en X.
- ⋄ $T(s+t)=T(t)T(s)$ (composición), para todo $t,s\in[0,+\infty)$.
- ⋄ $[0,+\infty)\times X\ni(t,x)\mapsto T(t)x\in X$ es continua.

La **órbita positiva** de un subconjunto E de X viene dada por

$$\gamma^+(E)=\bigcup_{t\geq 0}T(t)E.$$

Con la órbita se estudia el comportamiento asintótico de E bajo la acción del semigrupo, por ejemplo, cuando la órbita positiva es el propio conjunto. Se utilizan concretamente los subconjuntos **invariantes** bajo $T(\cdot)$, es decir, los conjuntos $A \subset X$ que cumplen

$$T(t)A = A, \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

Para relacionar las propiedades dinámicas de un conjunto invariante con otras órbitas, se introduce el concepto de atracción para lo cual es necesario comparar conjuntos. Esto se logra haciendo uso de la semidistancia de Hausdorff entre dos subconjuntos del espacio métrico, la cual viene dada por

$$d_H(A,B) = \sup\{d(a,B) : a \in A\}; \qquad A \subset X, \quad B \subset X.$$

De este modo, cuando

$$\lim_{t\to\infty} d_H\big(T(t)B, A\big) = 0; \qquad A \subset X, \quad B \subset X$$

se dice que A **atrae** al conjunto B. Finalmente, al subconjunto $\mathscr{A}$ de X se le denomina **atractor global** para $T(\cdot)$ cuando:

- ◇ $\mathscr{A}$ es compacto.
- ◇ $\mathscr{A}$ es invariante.
- ◇ $\mathscr{A}$ atrae a cada subconjunto acotado de X.

Cabe mencionar que cada atractor global no solo es único, sino también está formado por todas las soluciones globales que son acotadas.

La exposición se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 se definen los dos tipos de atractores locales y se describen las condiciones para obtener su equivalencia (proposición 2.11). En la sección 3 no solo se incluye el concepto de descomposición de Morse débil, sino también sus propiedades dinámicas. En este contexto, se usa la llamada familia invariante aislada para obtener el teorema 3.4, donde se establece la equivalencia del concepto de descomposición de Morse presentado por dos enfoques diferentes en los libros de Rybakowski (1987) y de Carvalho et al. (2013). En la sección 4, se introduce el concepto de semigrupo gradiente con respecto a una familia invariante aislada y se prueba que el semigrupo es dinámicamente gradiente con respecto a esa familia (proposición 4.8). Para la recíproca de esta afirmación se construye una función de Lyapunov generalizada, estableciéndose así la equivalencia entre los dos conceptos (teorema 4.13). En la sección 5, se presenta el teorema de estabilidad (teorema 5.3) como una aplicación de la teoría desarrollada en las secciones anteriores, mediante algunos ejemplos. Se concluye con el apéndice A, donde se describen las propiedades básicas de las soluciones maximales de una ecuación diferencial autónoma definida en un espacio de dimensión finita.

2. Atractores en un compacto invariante

El conjunto $\omega-$**límite**, asociado a E es

$$\omega(E) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\gamma^+(T(s)E)} = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\Big(\bigcup_{t\geq s} T(t)E\Big)}.$$

Este conjunto cerrado no solo verifica la siguiente igualdad $\omega(E) = \omega\big(T(t)E\big), \forall t \geq 0$, sino también es **positivamente invariante**: $T(t)\omega(E) \subset \omega(E), \forall t \geq 0$. Además

$$A \subset B \implies \omega(A) \subset \omega(B). \tag{1}$$

Por ejemplo, para un compacto invariante $A \subset X$ se cumple la igualdad $\omega(A) = A$. El $\omega-$límite del conjunto unitario $E = \{z\}$ se denota por $\omega(z)$ y satisface

$$\omega(z) = \big\{y \in X : \exists\, 0 < t_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty \text{ con } \lim_{k\to\infty} T(t_k)z = y\big\}.$$

Cabe mencionar que si $E \subset X$ es un conjunto no vacío, puede ocurrir que

$$\omega(E) \neq \bigcup_{z\in E} \omega(z).$$

Esto sucede, por ejemplo, en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + (x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)x, \\ \dot{y} = \;\; x + (x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)y. \end{cases} \tag{2}$$

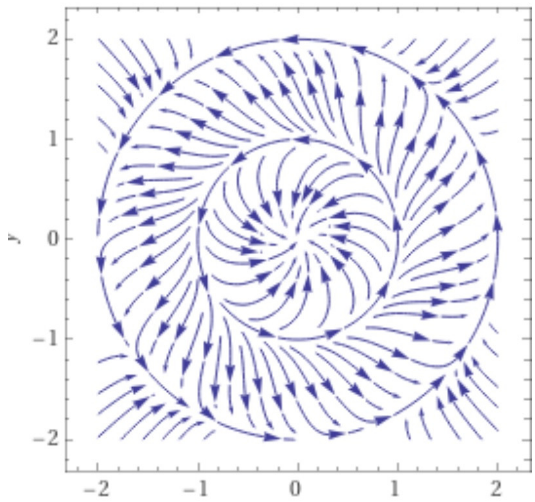

Figura 1. Retrato de fase del sistema (2)
`https://www.wolframalpha.com/`

En el siguiente disco compacto $\overline{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, se obtiene que $T(t)\overline{D}_1 = \overline{D}_1$ para todo $t \geq 0$. Además

$$\overline{D}_1 = \omega(\overline{D}_1) \neq \{(0,0)\} \cup \partial\overline{D}_1 = \bigcup_{z\in\overline{D}_1} \omega(z).$$

Observación 2.1. El sistema (2) es un caso especial del Ejemplo 6.3 y por tanto, definen adecuadamente un semigrupo. En coordenadas polares (r,θ) el sistema (2) induce naturalmente la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dr}{d\theta} = (r^2-1)(4-r^2)r.$$

En particular,

$$r > 2 \implies \frac{dr}{d\theta} < 0. \tag{3}$$

La desigualdad se preserva para $0 < r < 1$, y en $r = 1$ y $r = 2$ aparecen dos ciclos límite.

2.1 Pareja atractor-repulsor

La siguiente definición aparece en el libro de Rybakowski y no presupone la existencia de un atractor global para el semigrupo. Para evitar cualquier equivocación se habla de una pareja atractor–repulsor dentro de un compacto invariante. Este concepto es complementario al llamado par atractor–repulsor en un atractor global (definición 2.9).

Definición 2.2. Sea $S_{\mathscr{A}}$ un compacto invariante bajo $T(\cdot)$. El conjunto $A \subset S_{\mathscr{A}}$ es un **atractor local débil** (en $S_{\mathscr{A}}$) si existe una constante $\varepsilon > 0$ que satisface

$$\omega\big(\mathscr{O}_\varepsilon(A) \cap S_{\mathscr{A}}\big) = A.$$

El **repulsor** (relativo a $S_{\mathscr{A}}$) asociado al atractor local débil $A \subset S_{\mathscr{A}}$ es

$$A^* = \big\{x \in S_{\mathscr{A}} : \omega(x) \cap A = \varnothing\big\}.$$

Al par ordenado (A, A^*) se le dice: **pareja atractor–repulsor**, respecto a $S_{\mathscr{A}}$.

Ejemplo 2.3. En el semigrupo inducido por (2) y descrito por la Figura 1 el conjunto $S_{\mathscr{A}} = \overline{D_1}$ es un compacto, invariante bajo $T(\cdot)$. El conjunto $A = \overline{D_1}$ es un atractor local débil pues satisface $A = \omega\big(\mathscr{O}_\varepsilon(A) \cap S_{\mathscr{A}}\big)$ para algún $\varepsilon > 0$ y su respectivo repulsor A^* es $\varnothing$.

En el estudio de las propiedades dinámicas de la pareja atractor–repulsor (A, A^*) en un compacto invariante $S_{\mathscr{A}}$ (teorema 2.4), aparece el concepto de **solución global**. La solución global para el semigrupo $T(\cdot)$ es una función continua $\xi : \mathbb{R} \to X$ que verifica

$$T(t)\xi(s) = \xi(t+s), \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad y \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Si $x \in X$ admite una solución global ξ_x con $\xi_x(0) = x$ se dice que la solución global ξ_x **pasa por** x. Esta solución ξ_x verifica $\xi_x(t) = T(t)x$ para todo $t \geq 0$. Además, el conjunto $\alpha-$**límite** es

$$\alpha(\xi_x) = \big\{y \in X : \exists\, 0 < t_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty \text{ con } \lim_{k\to\infty} \xi_x(-t_k) = y\big\}.$$

En este contexto, por la continuidad del semigrupo se obtiene $T(t)\alpha(\xi_x) \subset \alpha(\xi_x), \forall t \geq 0$. Análogamente, para cada elección del parámetro $t \geq 0$, la regla de correspondencia $s \mapsto \xi_x(t+s)$ define una solución global que pasa por $T(t)x$.

Teorema 2.4. *Sea (A, A^*) una pareja atractor-repulsor para $T(\cdot)$, respecto a $S_{\mathscr{A}}$, entonces*

(a) Los conjuntos A y A^* son disjuntos, compactos e invariantes.

(b) Sea $\xi_x = \xi : \mathbb{R} \to S_{\mathscr{A}}$ la solución global que pasa por $x \in S_{\mathscr{A}}$; las siguientes implicaciones son válidas:

(i) Si $x \in A^*$ o la intersección $\omega(x) \cap A^* \neq \varnothing$, entonces $\xi(\mathbb{R}) \subset A^*$.

(ii) Si $\alpha(\xi) \cap A \neq \varnothing$ entonces $\xi(\mathbb{R}) \subset A$.

(iii) Si $x \notin A \cup A^*$, entonces $A^* \supset \alpha(\xi)$ y $\omega(x) \subset A$.

Demostración. La prueba de este teorema aparece en el último capítulo del libro de Rybakowski (1987). □

Corolario 2.5. *Sean $x \in S_{\mathscr{A}}$ y A el atractor local débil en $S_{\mathscr{A}}$.*

$$\textit{Si } \omega(x) \cap A \neq \varnothing, \textit{ entonces } \omega(x) \subset A.$$

Demostración. Se observa inicialmente que si $x \in A$, entonces por la propiedad (1) y la invarianza de A se obtiene directamente que el conjunto $\omega(x)$ está incluido en A. Si por el contrario $x \notin A$ y la interserccíón $\omega(x) \cap A \neq \varnothing$, la definición del repulsor A^* implica directamente que $x \notin A^*$. En otras palabras, $x \notin (A \cup A^*)$. Por el teorema 2.4, se obtiene $\omega(x) \subset A$. Por lo tanto, se cumple el corolario. □

2.2 Pares en un atractor global

El atractor global de $T(\cdot)$ es el compacto invariante que atrae a cada subconjunto acotado de X. En otras palabras, el atractor global es un compacto invariante al cual confluyen todas las trayectorias, este hecho nos da la información de cómo evoluciona el sistema con el transcurrir del tiempo. Cabe recordar que el atractor global es único y se caracteriza con las soluciones globales ξ que son acotadas. Es decir, el atractor global $\mathscr{A}$ satisface

$$\mathscr{A} = \Big\{\xi(0) : \xi \text{ es una solución global acotada}\Big\}.$$

A continuación, se presenta un resultado de existencia del atractor global en dimensión finita, tal como aparece en Gavilán (2019). Cabe mencionar que tal monografía no describe la estabilidad de las familias uniparamétricas de semigrupos en el sentido de la sección 5.

Proposición 2.6. *Si $X = \mathbb{R}^n$ y $T(\cdot)$ admite un subconjunto acotado $B \subset \mathbb{R}^n$ que atrae a cada conjunto unitario de $\mathbb{R}^n$. Entonces B atrae a cada subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. En particular, B es atrayente, es decir:*

$$\lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)C, B\big) = 0, \quad \forall C \subset \mathbb{R}^n, \textit{ acotado.}$$

Demostración. La condición «B atrae al conjunto A» es equivalente a decir para cada constante $\varepsilon > 0$, la vecindad $\mathscr{O}_\varepsilon(B)$ absorbe al conjunto A. Simbólicamente esto significa:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_{A,\varepsilon} > 0 \text{ tal que } T(t)A \subset \mathscr{O}_\varepsilon(B), \text{ si } t \geq t_{A,\varepsilon}. \qquad (4)$$

Esto se obtiene directamente, puesto que la inclusión $T(t)A \subset \mathscr{O}_\varepsilon(B)$ es equivalente a la desigualdad $d_H(T(t)A, B) \leq \varepsilon$. En este contexto, basta probar que para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \mathscr{O}_\varepsilon(B) \text{ absorbe al conjunto } K.$$

En efecto, si $\varepsilon > 0$, la condición $\lim\limits_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)x, B\big) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ implica que alguna vecindad abierta de $x \in K$ es absorbida por $\mathscr{O}_\varepsilon(B)$. Usando una cobertura finita del compacto K se infiere que $\mathscr{O}_\varepsilon(B)$ absorbe K. Por (4), se obtiene que B atrae a cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

El conjunto B es atrayente, pues para cada acotado $C \subset \mathbb{R}^n$ su clausura $\overline{C}$ es un compacto que satisface no solo la inclusión $\overline{T(t)C} \subset T(t)\overline{C}$ sino también

$$d_H\big(T(t)C, B\big) = d_H\Big(\overline{T(t)C}, B\Big) \leq d_H\big(T(t)\overline{C}, B\big) \to 0.$$

Esto concluye la demostración. □

Ejemplo 2.7. La ecuación diferencial

$$\dot{x} = -x(x-\eta)(x+\eta), \quad \eta \text{ es una constante}$$

induce un semigrupo $T(\cdot)$ que admite un conjunto compacto e invariante que atrae a cada número real. Específicamente, a partir de la proposición 2.6, se obtiene que el intervalo $\mathscr{A} = [-\eta\ ,\ \eta]$ es el atractor global.

Ejemplo 2.8. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales dado en (2). Por la caracterización presentada en (3), se obtiene directamente que el disco

$$\overline{D_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\},$$

de la Figura 1, es un conjunto compacto e invariante bajo $T(\cdot)$ que atrae a cada conjunto unitario del plano $\mathbb{R}^2$. En este contexto, la proposición 2.6 garantiza que el disco $\overline{D_2}$ es el atractor global del sistema.

A continuación, se estudia la estructura del atractor global.

Definición 2.9. Sea $T(\cdot)$ un semigrupo que admite un atractor global $\mathscr{A} \subset X$. Un subconjunto $A \subset \mathscr{A}$ es un **atractor local del semigrupo** si

$$\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A)) = A, \quad \text{para algún} \quad \varepsilon > 0.$$

El **repulsor** A^* asociado al atractor local A es el conjunto definido por

$$A^* = \{x \in \mathscr{A} : \omega(x) \cap A = \varnothing\}.$$

El par (A, A^*) es llamado **par atractor-repulsor para** $T(\cdot)$.

Ejemplo 2.10. A manera de ilustración se presentan algunos atractores locales que se construyen dentro del atractor global $\mathscr{A} = \overline{D_2}$ (ejemplo 2.8). Específicamente, ellos son:

$$A_0 = \varnothing,\ A_1 = \{(0,0)\},\ A_2 = \{(0,0)\} \cup \partial\overline{D_2}\ \text{ y }\ A_3 = \overline{D_2} = \mathscr{A}.$$

Así, cada uno de estos conjuntos cumplen $\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A_j)) = A_j$ para algún $\varepsilon > 0$ cuando $0 \leq j \leq 3$. Sus respectivos repulsores asociados son:

$$A_0^* = \mathscr{A},\ A_1^* = \overline{D_2} \setminus \mathrm{int}(\overline{D_1}),\ A_2^* = \partial\overline{D_1}\ \text{ y }\ A_3^* = \varnothing$$

donde $\mathrm{int}(\overline{D_1})$ significa el interior de $\overline{D_1}$. Además se observa que

$$\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 = \mathscr{A} \quad \text{y} \quad \varnothing = A_3^* \subset A_2^* \subset A_1^* \subset A_0^* = \mathscr{A}.$$

La siguiente proposición presenta las definiciones de atractor local de acuerdo a dos enfoques diferentes. El primero aparece en el libro de Rybakowski (1987) y el segundo se encuentra en el libro de Carvalho et al. (2013).

Proposición 2.11. *Sea $\mathscr{A}$ un atractor global para $T(\cdot)$. Si $A \subset \mathscr{A}$ es invariante, son equivalentes:*

(a) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\omega\big(\mathscr{O}_\varepsilon(A) \cap \mathscr{A}\big) = A$.

(b) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\omega\big(\mathscr{O}_\varepsilon(A)\big) = A$.

Demostración. Si se acepta el ítem (b), basta observar que

$$A \subset \mathscr{O}_\varepsilon(A) \cap \mathscr{A} \subset \mathscr{O}_\varepsilon(A).$$

A partir de las propiedades del conjunto límite, que aparecen en (1), se obtiene que

$$\omega(A) \subset \omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A) \cap \mathscr{A}) \subset \omega(\mathscr{O}_\varepsilon(A)) = A$$

Por lo tanto, se cumple (a) pues A es invariante.
Para la demostración de la recíproca vea el libro de Carvalho et al. (2013). □

Observación 2.12. Cuando en la proposición 2.11, se sustituye la condición $\mathscr{A}$ (atractor global) por $S_\mathscr{A}$ (compacto e invariante) la equivalencia no necesariamente es válida.

Este hecho se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.13. Sea $S_\mathscr{A} = \overline{D_1}$. En el ejemplo 2.3 se observa que el conjunto $A = \overline{D_1}$ cumple el ítem (a) de la proposición 2.11, sin embargo $A = \overline{D_1}$ no satisface el ítem (b), pues $\omega\big(\mathscr{O}_\varepsilon(A)\big) \neq A$ para todo $\varepsilon > 0$.

3. Descomposición de Morse

El estudio de la descomposición de Morse es una herramienta importante que permite entender la dinámica de un atractor global.

Definición 3.1. Sea $S_\mathscr{A} \subset X$, un conjunto compacto e invariante con respecto a $T(\cdot)$. Una colección ordenada $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de subconjuntos $E_j \subset S_\mathscr{A}$ es una **descomposición de Morse débil** de $S_\mathscr{A}$ si existe un sucesión creciente

$$A_0 = \varnothing \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset S_\mathscr{A} = A_n \tag{5}$$

de atractores locales débiles, en $S_\mathscr{A}$ para los cuales se cumple

$$E_j = A_j \cap A_{j-1}^*, \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Las propiedades básicas de una familia que satisface esta definición se describen en la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *Sea $S_\mathscr{A} \subset X$ un compacto, invariante con respecto a $T(\cdot)$ y $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una descomposición de Morse de $S_\mathscr{A}$ asociada a los atractores locales débiles, $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n = S_\mathscr{A}$. Se satisfacen los siguientes enunciados.*

(a) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathscr{O}_\varepsilon(E_i) \cap \mathscr{O}_\varepsilon(E_j) = \varnothing$ si $1 \leq i < j \leq n$.

(b) Si $\xi_x = \xi : \mathbb{R} \to S_\mathscr{A}$ es la solución global que pasa por $x \in S_\mathscr{A}$, entonces:

- *o $\xi(\mathbb{R}) \subset E_j$ para algún $j = 1, \ldots, n$.*
- *o existen $k < r$ tal que $E_k \supset \omega(x)$ y $\alpha(x) \subset E_r$.*

(c) Cada A_k está únicamente determinado por $\{E_1, \ldots, E_n\}$:

$$A_k = \{x \in S_\mathscr{A} : \alpha(\xi_x) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_k\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

(d) Si $1 \leq i \leq n$, $\big(A_{i-1}, E_i\big)$ es una pareja atractor-repulsor respecto a A_i.

Demostración. Referimos al libro de Rybakowski. □

La siguiente proposición describe una caracterización de la existencia de una familia que satisface la definición 3.1.

Proposición 3.3. *Sea $S_{\mathscr{A}} \subset X$ un compacto, invariante con respecto a $T(\cdot)$. Si se asume que la familia ordenada $\{E_1,\ldots,E_n\}$ satisface las tres condiciones:*

1. *Cada $E_k \subset S_{\mathscr{A}}$ es compacto e invariante.*
2. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathscr{O}_\varepsilon(E_i) \cap \mathscr{O}_\varepsilon(E_j) = \varnothing$, si $1 \le i < j \le n$.*
3. *Si $\xi = \xi_x : \mathbb{R} \to S_{\mathscr{A}}$ es la solución global que pasa por $x \in S_{\mathscr{A}}$, entonces*
   - *o $\xi_x(\mathbb{R}) \subset E_i$ para algún $i = 1,\ldots,n$.*
   - *o existen $j < i$ tal que $E_j \supset \omega(x)$ y $\alpha(\xi_x) \subset E_i$.*

Entonces $\{E_1,\ldots,E_n\}$ es una descomposición de Morse de $S_{\mathscr{A}}$.

Demostración. La prueba está en el libro de Rybakowski. □

3.1 Familia invariante aislada

Este concepto aparece en el artículo de Aragão et al. (2011) y es de gran utilidad para describir las propiedades de una descomposición de Morse, en un atractor global $\mathscr{A}$ (teorema 3.4). La familia $\{E_1,\ldots,E_n\}$ es **invariante aislada** si existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathscr{O}_\delta(E_i) \cap \mathscr{O}_\delta(E_j) = \varnothing, \text{ cuando } 1 \le i < j \le n$$

y cada cerrado $E_i \subset \mathscr{A}$ es el invariante maximal en $\mathscr{O}_\delta(E_i)$. En otras palabras, cada conjunto cerrado E_i es invariante aislado. Específicamente, un conjunto cerrado e invariante $E \subset X$ se denomina **invariante aislado**, si existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto inicial E es el invariante maximal en $\mathscr{O}_\varepsilon(E)$, es decir, cualquier conjunto invariante $B \subset \mathscr{O}_\varepsilon(E)$ satisface $B \subset E$. Por ejemplo, en un atractor global $\mathscr{A}$

$$\text{cada atractor local } A \subset \mathscr{A} \text{ y su respectivo repulsor}$$

son invariantes aislados.
El siguiente teorema demuestra la equivalencia del concepto de descomposición de Morse dados en los libros de Rybakowski (1987) y de Carvalho et al. (2013). Cabe mencionar que por la proposición 2.11 los pares atractor-repulsor en un atractor global heredan las propiedades topológicas de las parejas atractor-repulsor, por ejemplo la compacidad. En particular, se dan las condiciones para aplicar el teorema 2.4.

Teorema 3.4. *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo que admite un atractor global $\mathscr{A}$. Son equivalentes:*

(1) El atractor global admite una descomposición de Morse débil. Es decir, existe una colección ordenada $\{\tilde{E}_1,\ldots,\tilde{E}_n\}$ asociada a una familia de atractores locales débiles en $\mathscr{A}$

$$\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n = \mathscr{A}$$

por medio de la relación

$$\tilde{E}_j = A_j \cap A^*_{j-1}, \quad \forall 1 \le j \le n.$$

(2) El atractor global admite una familia ordenada $\{E_1,\ldots,E_n\}$ de cerrados que es invariante aislada, para la cual cada solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ induce i, j con $i \ge j$ tal que

$$E_i \xleftarrow{t\to-\infty} \xi(t) \xrightarrow{t\to+\infty} E_j.$$

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$): Se prueba inicialmente que la siguiente familia ordenada $\{\tilde{E}_1,\ldots,\tilde{E}_n\}$ es invariante aislada. Para obtener esta afirmación se observa que todos los conjuntos $\tilde{E}_j = A_j \cap A^*_{j-1}$ son compactos y disjuntos, por ello existe una constante positiva $\varepsilon > 0$ que satisface $\mathscr{O}_\varepsilon(\tilde{E}_i) \cap \mathscr{O}_\varepsilon(\tilde{E}_j) = \varnothing$ cuando $1 \le i < j \le n$. Como $\tilde{E}_i$ es el repulsor de A_{i-1} en A_i, entonces $\tilde{E}_i$ es invariante aislado, es decir, admite una constante $\delta_i > 0$ de modo que $\tilde{E}_i$ es invariante maximal en $\mathscr{O}_{\delta_i}(\tilde{E}_i)$. Por tanto,

- Existe la constante $\delta = \text{mín}\{\varepsilon, \delta_1, \ldots, \delta_n\} > 0$ para la cual se cumple que $\tilde{E}_i$ es invariante maximal en $\mathscr{O}_\delta(\tilde{E}_i)$. Además, si $1 \le i < j \le n$, la intersección $\mathscr{O}_\delta(\tilde{E}_i) \cap \mathscr{O}_\delta(\tilde{E}_j) = \varnothing$.

Continuando con la prueba, se afirma que cada solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ induce subíndices i, j con $i \ge j$ de modo que $\alpha(\xi) \subset \tilde{E}_i$ y $\omega(\xi(0)) \subset \tilde{E}_j$. En este sentido, se da $x = \xi(0) \in \mathscr{A}$ y se elige el subíndice i como el menor elemento del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ para el cual el respectivo atractor local A_i contiene a x, pero A_{i-1} no lo incluye. Es decir,

$$i = min\{1,\ldots,n \colon x \in A_i, \text{ pero } x \notin A_{i-1}\}.$$

En este contexto, si $x \in A^*_{i-1}$, la invarianza del conjunto cerrado $\tilde{E}_i$ garantiza que $\alpha(\xi) \cup \omega(x) \subset \tilde{E}_i$ y se concluye. Si por el contrario $x \notin A^*_{i-1}$ es decir $x \notin (A_{i-1} \cup A^*_{i-1})$, el teorema 2.4 muestra que $\alpha(\xi) \subset A^*_{i-1}$ y $\omega(x) \subset A_{i-1}$. La elección de i y la invarianza de A_i implica que $\alpha(\xi) \subset \tilde{E}_i = A_i \cap A^*_{i-1}$. De $\omega(x) \subset A_{i-1}$, pueden ocurrir dos situaciones complementarias:

$$o \quad \omega(x) \cap A^*_{i-2} \neq \varnothing, \text{ o bien } \omega(x) \cap A^*_{i-2} = \varnothing.$$

Si $\omega(x) \cap A^*_{i-2} \neq \varnothing$, el teorema 2.4 muestra que $\omega(x) \subset A^*_{i-2}$ y se concluye que $\omega(x) \subset \tilde{E}_{i-1}$. Si por el contrario $\omega(x)$ es disjunto de A^*_{i-2} se desprende que $\omega(x) \cap \tilde{E}_{i-1} = \varnothing$. Es más, la suposición $\omega(x) \cap A^*_{i-2} = \varnothing$ implica que $\omega(x) \cap A_{i-2} \neq \varnothing$ y por el corolario 2.5 se obtiene $\omega(x) \subset A_{i-2}$. En este contexto,

$$\left.\begin{array}{l} \omega(x) \subset A_{i-2} \\ \omega(x) \cap A^*_{i-3} \neq \varnothing \end{array}\right\} \implies \omega(x) \subset \tilde{E}_{i-2}$$

y

$$\left.\begin{array}{l} \omega(x) \subset A_{i-2} \\ \omega(x) \cap A^*_{i-3} = \varnothing \end{array}\right\} \implies \omega(x) \subset A_{i-3}.$$

De este modo, se desprende que $\omega(x) \subset \tilde{E}_{i-2}$ o bien $\omega(x) \subset A_{i-3}$. Continuando con este procedimiento inductivo, puede finalmente ocurrir que $\omega(x) \subset A_2$, y así se desprende que $\omega(x) \subset \tilde{E}_2$ o bien $\omega(x) \subset A_1 = \tilde{E}_1$. Es decir, $\omega(x) \subset \tilde{E}_j$, para algún $1 \le j < i$. Por lo tanto, se cumple (2) en el presente teorema.

($2 \Rightarrow 1$): La familia ordenada de cerrados $\{E_1,\ldots,E_n\}$ es invariante aislada, existe $\delta > 0$ tal que $\mathscr{O}_\delta(E_i) \cap \mathscr{O}_\delta(E_j) = \varnothing$ cuando $1 \le i < j \le n$, y además cada cerrado $E_i \subset \mathscr{A}$ es invariante maximal en $\mathscr{O}_\delta(E_i)$. La compacidad de $\mathscr{A}$ garantiza que cada E_i es compacto. Con todo esto, (2) induce las condiciones de la proposición 3.3. Por lo tanto, la familia $\{E_1,\ldots,E_n\}$ es una descomposición de Morse y se obtiene (1). Esto concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 3.5. La descomposición de Morse $\mathscr{S}=\{E_1,E_2,E_3\}$ del atractor global $\mathscr{A}=\overline{D_2}$ se obtiene utilizando la relación $E_j=A_j\cap A^*_{j-1}$ para todo $1\le j\le 3$, donde el par atractor–repulsor (A_j,A_j^*) están dados en el ejemplo 2.10. Es decir,

$$E_1=A_1\cap A_0^*=\{(0,0)\}\cap\overline{D_2}=\{(0,0)\}.$$

$$E_2=A_2\cap A_1^*=\left(\{(0,0)\}\cup\partial\overline{D_2}\right)\cap\left(\overline{D_2}\backslash\mathrm{int}(\overline{D_1})\right)=\partial\overline{D_2}.$$

$$E_3=A_3\cap A_2^*=\overline{D_2}\cap\partial\overline{D_1}=\partial\overline{D_1}.$$

Además, se observa que la familia ordenada $\mathscr{S}=\{E_1,E_2,E_3\}$ de cerrados es invariante aislada. Además, en la Figura 1, para cada solución global $\xi:\mathbb{R}\to\mathscr{A}$ se cumple

$$E_3\xleftarrow{t\to-\infty}\xi(t)\xrightarrow{t\to+\infty}E_i\ \text{ cuando }\ i=1;2. \qquad (6)$$

4. Semigrupo dinámicamente gradiente y función de Lyapunov

En esta sección, se caracteriza al semigrupo gradiente usando el siguiente concepto de estructura homoclínica.

Definición 4.1. Sea $T(\cdot)$, un semigrupo y sea $\mathscr{S}=\{E_1,\ldots,E_n\}$, una familia invariante aislada. Una **estructura homoclínica** en $\mathscr{S}$ es un subconjunto $\{E_{k_1},\ldots,E_{k_p}\}$ de $\mathscr{S}$ $(p\le n)$, asociado a soluciones globales $\{\xi_1,\ldots,\xi_p\}$ para las cuales se cumple

$$E_{k_j}\xleftarrow{t\to-\infty}\xi_j(t)\xrightarrow{t\to+\infty}E_{k_{j+1}},\qquad 1\le j\le p$$

donde $E_{k_{p+1}}=E_{k_1}$ y cada ξ_j admite un t_j con $\xi_j(t_j)\notin(E_{k_j}\cup E_{k_{j+1}})$.

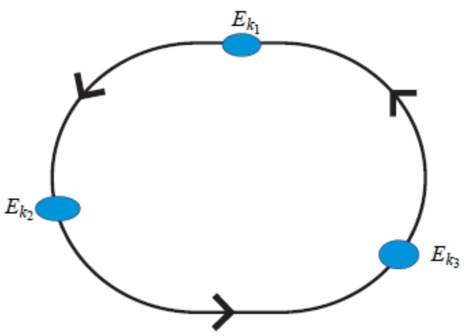

Figura 2. Estructura homoclínica ($p=3$).

Ejemplo 4.2. De (6) se infiere que el sistema no tiene estructura homoclínica en la familia invariante aislada $\mathscr{S}$.

A continuación, se presenta el concepto de semigrupo dinámicamente gradiente, de acuerdo con la presentación dada en el libro de Carvalho et al. (2013). Cabe mencionar que este concepto aparece inicialmente en el artículo de Aragão et al. (2011) con el nombre de *semigrupo tipo-gradiente* y en el artículo de Carvalho et al. (2007) se extiende al caso de los procesos de evolución.

Definición 4.3. Sea $T(\cdot)$, un semigrupo que admite un atractor global $\mathscr{A}$ y sea $\mathscr{S}=\{E_1,\ldots,E_n\}$, una familia invariante aislada. Se dice que $T(\cdot)$ es **dinámicamente gradiente**, respecto a $\mathscr{S}$ si

- ◇ Para cualquier solución global $\xi:\mathbb{R}\to\mathscr{A}$ existe $1\le i,j\le n$ tal que
$$E_i\xleftarrow{t\to-\infty}\xi(t)\xrightarrow{t\to+\infty}E_j,$$
- ◇ No existe una estructura homoclínica asociada a $\mathscr{S}$.

Ejemplo 4.4. La ecuación diferencial $\dot{x}=-x(x-1)(x+1)$, induce un semigrupo $T(\cdot)$ que tiene un atractor global $\mathscr{A}=[-1,1]$. Sea $\mathscr{S}=\{E_1,E_2,E_3\}$ una familia invariante aislada, donde $E_1=\{-1\};E_2=\{1\}$ y $E_3=\{0\}$. Se observa que para cualquier solución global $\xi:\mathbb{R}\to\mathscr{A}$ se cumple

$$E_3\xleftarrow{t\to-\infty}\xi(t)\xrightarrow{t\to+\infty}E_j,\ \ j=1;2.$$

Por lo tanto, no existe estructura homoclínica en $\mathscr{S}$ y en consecuencia $T(\cdot)$ es dinámicamente gradiente respecto a $\mathscr{S}$.

Ejemplo 4.5. De los resultados obtenidos en los ejemplos 3.5 y 4.2 se concluye que el semigrupo $T(\cdot)$ es dinámicamente gradiente con respecto a la familia invariante $\mathscr{S}=\{E_1,E_2,E_3\}$.

4.1 Semigrupo gradiente

Definición 4.6. Sea $T(\cdot)$, un semigrupo que admite un atractor global $\mathscr{A}$ y sea $\mathscr{S}=\{E_1,\ldots,E_n\}$, una familia invariante aislada. Se dice que $T(\cdot)$ es un **semigrupo gradiente con respecto a** $\mathscr{S}$ si existe una función continua $V:X\to\mathbb{R}$ tal que:

- ◇ La función $[0,\infty)\ni t\mapsto V(T(t)x)\in\mathbb{R}$ es decreciente, para cada $x\in X$;
- ◇ V es constante en E_i, para cada $1\le i\le n$ y
- ◇ $V(T(t)x)=V(x),\forall t\ge 0$ si y sólo si $x\in\bigcup_{i=1}^{n}E_i$.

V es la **función de Lyapunov generalizada** de $T(\cdot)$, con respecto a $\mathscr{S}$.

Ejemplo 4.7. La ecuación diferencial

$$\dot{x}=-x^3,\ \ x\in\mathbb{R},$$

genera un semigrupo $T(\cdot)$ cuyo atractor global es $\mathscr{A}=\{0\}$. En este caso, $\mathscr{S}=\{E_1\}=\{\{0\}\}$ es invariante aislada y la función $V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $V(y)=\frac{y^4}{4}$ cumple

$$\frac{d}{dt}V(x(t))=-x^6(t),$$

donde $x(t)=T(t)x_0$ es la solución que satisface $x(0)=x_0$. Claramente se verifica que $t\mapsto V(T(t)x_0)$ es decreciente. Además, $V(x(t))=V(x_0),\forall t\ge 0$ implica que $x(t)\in\{0\}=E_1$. Por tanto, V es una función de Lyapunov y el semigrupo es gradiente con respecto a $\mathscr{S}$.

Proposición 4.8. *Si $V : X \to \mathbb{R}$ es una función de Lyapunov generalizada de $T(\cdot)$, con respecto a la familia invariante aislada $\mathscr{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, entonces $T(\cdot)$ es dinámicamente gradiente con respecto a $\mathscr{S}$.*

Demostración. Para verificar la definición 4.3 se considera una solución global ξ_x, con $\xi_x(0) = x$. Como $T(\cdot)$ es gradiente con respecto a la familia invariante aislada $\mathscr{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, se cumple que

$$\omega(x) \subset \bigcup_{k=1}^{n} E_k \text{ y } \alpha(\xi_x) \subset \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Por tanto,

- ◇ Para cualquier solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ existe $1 \leq i, j \leq n$ tal que
$$E_i \xleftarrow{t \to -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \to +\infty} E_j,$$

Para probar que $\mathscr{S}$ no tiene una estructura homoclínica se procede por reducción al absurdo. En otras palabras:

- Se admite un subconjunto $\{E_{k_1}, \ldots, E_{k_p}\}$ de $\mathscr{S}$ $(p \leq n)$, asociado a soluciones globales $\{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$ tales que
$$E_{k_j} \xleftarrow{t \to -\infty} \xi_j(t) \xrightarrow{t \to +\infty} E_{k_{j+1}},$$
cuando $1 \leq j \leq p$ con $E_{k_{p+1}} = E_{k_1}$.

Como V es continua y decreciente a lo largo de las soluciones, para todo $1 \leq j \leq p$ y $s \leq 0 \leq t$ se tiene

$$V(\alpha(\xi_j)) \geq V(\xi_j(s)) \geq V(\xi_j(0)) \geq V(\xi_j(t)) \geq V(\omega(\xi_j(0))),$$

donde $V(E_{k_j}) = V(\alpha(\xi_j))$ y $V(\omega(\xi_j(0))) = V(E_{k_{j+1}})$. Puesto que $E_{k_{p+1}} = E_{k_1}$, se desprende que $V(T(t)\xi_p(0)) = V(\xi_p(t)) = V(\xi_p(0))$ y por la definición 4.6, $\xi_p(0) \in \cup_{j=1}^{p} E_{k_j}$. Por la invarianza de cada E_{k_j} se tiene que los conjuntos límites $\omega(\xi_p(0)), \alpha(\xi_p) \subset E_{k_{j_0}}$ para algún $1 \leq j_0 \leq p$. Como $\omega(\xi_p(0)) \subset E_{k_{p+1}}$ y $\alpha(\xi_p) \subset E_{k_p}$, surge una contradicción con la definición de familia invariante aislada. Consecuentemente,

- ◇ No existe una estructura homoclínica asociada a $\mathscr{S}$.

Por tanto, el semigrupo satisface la definición 4.3. □

4.2 Atractor tipo-gradiente

En el artículo de Carvalho et al. (2009), se presenta el concepto de atractor tipo-gradiente como el atractor que se caracteriza por medio de la unión de los conjuntos inestables de sus conjuntos invariantes asociados (8). En este contexto, de acuerdo con la clásica teoría de los sistemas dinámicos, el **conjunto inestable** de un subconjunto invariante E viene dado por

$$W^u(E) = \left\{ z \in X : \exists\, \xi_z : \mathbb{R} \to X \text{ y } \lim_{s \to -\infty} d_H\big(\xi_z(s), E\big) = 0 \right\}.$$

Ejemplo 4.9. Se considera los conjuntos invariantes

$$E_1 = \{(0,0)\},\ E_2 = \partial \overline{D_2} \text{ y } E_3 = \partial \overline{D_1}$$

para el semigrupo generado por el sistema dado en (2). Los conjuntos inestables de cada E_j son:

$$W^u(E_1) = E_1,\ W^u(E_2) = E_2 \text{ y } W^u(E_3) = \mathrm{int}(\overline{D_2}) \backslash E_1.$$

Además, cuando los conjuntos invariantes son atractores locales, estos coinciden con sus conjuntos inestables.

En el siguiente teorema se describen las propiedades básicas de un semigrupo dinámicamente gradiente respecto a una descomposición de Morse del atractor global. En este contexto, se utilizan los conjuntos inestables para obtener atractores locales.

Teorema 4.10. *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo dinámicamente gradiente respecto a la familia invariante aislada $\mathscr{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$. Si $\mathscr{S}$ es una descomposición de Morse de $\mathscr{A}$. Entonces los conjuntos*

$$A_k = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(E_i), \quad \text{con} \quad 1 \leq k \leq n$$

son atractores locales de $T(\cdot)$ que satisfacen las inclusiones $A_0 = \varnothing \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n = \mathscr{A}$ y $E_j = A_j \cap A_{j-1}^*$. Además,

$$\bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} E_j. \tag{7}$$

Demostración. Una prueba aparece en el artículo de Aragão et al. (2011). □

Del teorema 4.10 se desprende otra caracterización del atractor global:

$$\mathscr{A} = A_n = \bigcup_{i=1}^{n} W^u(E_i) \tag{8}$$

y recibe el nombre de atractor tipo-gradiente.

Ejemplo 4.11. Si se considera los resultados del ejemplo 4.9 se tiene que

$$\mathscr{A} = A_3 = \bigcup_{i=1}^{3} W^u(E_i).$$

donde E_i fueron obtenidos utilizando la relación $E_i = A_i \cap A_{i-1}^*$ del ejemplo 3.5 en el cual también se presentan los atractores locales.

4.3 Construcción de la función de Lyapunov generalizada

Los siguientes resultados permiten construir la función de Lyapunov generalizada del teorema 4.13.

Proposición 4.12. *Se asume que $T(\cdot)$ admite un atractor global $\mathscr{A}$ y que (A, A^*) es un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$, con $A \neq \varnothing$.*

1.- *La función $h : X \to [0, +\infty)$ dada por $h(z) = \sup_{t \geq 0} d\big(T(t)z, \mathscr{A}\big)$ cumple*

   (a) $h^{-1}(0) = \mathscr{A}$ y h es continua en X.

   (b) $t \mapsto h\big(T(t)z\big)$ es decreciente, para cada $z \in X$.

2.- *La función $L : X \to [0,1]$, dada por*

$$L(z) = \frac{d(z,A)}{d(z,A) + d(z,A^*)} \quad \text{está bien definida}$$

y es uniformemente continua en X. Además, $L^{-1}(0) = A$ y $L^{-1}(1) = A^*$.

3.- *La función* $K : X \to [0,1]$ *dada por* $K(z) = \sup_{t\geq 0} L(T(t)z)$ *esta bien definida y satisface:*

(a) *K es continua en X y decreciente a lo largo de las soluciones.*

(b) $K^{-1}(0) = A$ *y* $K^{-1}(1) \cap \mathscr{A} = A^*$.

(c) *Si* $z \in \mathscr{A}$ *y* $K(T(t)z) = K(z)$, $\forall\, t \geq 0$ *entonces* $z \in A \cup A^*$.

4.- *La función* $f : X \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(z) = K(z) + h(z)$ *es continua en* X, *y satisface:*

(a) *f decreciente a lo largo de las soluciones.*

(b) $f^{-1}(0) = A$ *y* $f^{-1}(1) \cap \mathscr{A} = A^*$.

(b) *Si* $z \in X$ *y* $f(T(t)z) = f(z)$, $\forall\, t \geq 0$ *entonces* $z \in A \cup A^*$.

Demostración. Esta construcción aparece en los trabajos de Aragão et al. (2011); Carvalho et al. (2013) (vea también las tesis de Marín (2016)). □

Los autores en el artículo de Aragão et al. (2011), recuerdan que en el artículo de «*en Carvalho et al. (2009) aparecen los semigrupos dinámicamente gradiente(no requieren la existencia de una función de Lyapunov, sólo algunas propiedades en la descomposición de Morse del atractor) como un concepto intermedio entre los semigrupos gradientes y los semigrupos que admiten un atractor tipo-gradiente*» (8). Para los semigrupos que admiten un atractor global, ser dinámicamente gradiente con respecto a una familia invariante aislada es equivalente a poseer una función de Lyapunov generalizada.

Teorema 4.13. *Sea $T(\cdot)$, un semigrupo que admite un atractor global $\mathscr{A}$ y sea $\mathscr{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, una familia invariante aislada. Son equivalentes:*

(1) $T(\cdot)$ es un semigrupo gradiente con respecto a $\mathscr{S}$.

(2) $T(\cdot)$ es $\mathscr{S}-$dinámicamente gradiente.

Demostración. La parte $(1 \Rightarrow 2)$ se prueba en la proposición 4.8. Para obtener $(2 \Rightarrow 1)$ se construye una función de Lyapunov generalizada $V : X \to \mathbb{R}$ que satisface $V(E_k) = k-1$ para $1 \leq k \leq n$. Inicialmente se reordena $\mathscr{S}$ para obtener una descomposición de Morse y se usa cada par atractor-repulsor (A_j, A_j^*). Con esto se consideran las funciones continuas K_j dadas por

$$K_j(z) = \sup_{t\geq 0}\left[\frac{d\big(T(t)z, A_j\big)}{d\big(T(t)z, A_j\big) + d\big(T(t)z, A_j^*\big)}\right], \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

y se define

$$V(z) = h(z) + \sum_{j=0}^{n} K_j(z),$$

donde

$$K_0(z) = \sup_{t\geq 0}\left[\frac{d\big(T(t)z, \varnothing\big)}{d\big(T(t)z, \varnothing\big) + d\big(T(t)z, \mathscr{A}\big)}\right] = 0.$$

Como las funciones h y K_j son decrecientes a lo largo de las soluciones (proposición 4.12), se obtiene el primer ítem de la definición 4.6, según el cual:

◇ La función $[0,\infty) \ni t \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ es decreciente, para cada $x \in X$.

Para continuar se considera $z \in E_k = A_k \cap A_{k-1}^*$. De este modo, $z \in A_k \subset A_{k+1} \subset \cdots \subset A_n = \mathscr{A}$ y

$$z \in A_{k-1}^* \subset A_{k-2}^* \subset \cdots \subset A_1^* \subset A_0^* = \mathscr{A}.$$

En consecuencia

$$h(z) = 0,\ K_j(z) = 1, \text{ si } 1 \leq j \leq k-1 \text{ y } K_j(z) = 0, \text{ si } k \leq j \leq n.$$

Es decir,

$$V(z) = \sum_{j=0}^{n} K_j(z) = \sum_{j=0}^{k-1} k_j(z) + \sum_{j=k}^{n} K_j(z) = \sum_{j=0}^{k-1} 1 + \sum_{j=k}^{n} 0 = k-1.$$

Por lo tanto, $V(E_k) = k-1$, para todo $1 \leq k \leq n$ y se obtiene la siguiente afirmación.

◇ V es constante en E_i, para cada $1 \leq i \leq n$.

Para probar que V satisface la definición 4.6 se afirma:

$$\Big(V(T(t)z) = V(z),\ \forall t \geq 0\Big) \quad \Longrightarrow \quad z \in \bigcup_{j=1}^{n} E_j. \tag{9}$$

Para obtener (9) se observa que las funciones h y K_j son decrecientes a lo largo de las soluciones de $T(\cdot)$, es decir,

$$h(T(t)z) \leq h(z) \;\text{ y }\; K_j(T(t)z) \leq K_j(z), \forall t \geq 0 \;\text{ si } 0 \leq j \leq n.$$

Si existe $t > 0$ con $h(T(t)z) < h(z)$ (o bien $K_j(T(t)z) < K_j(z)$, para algún $0 \leq j \leq n$) se obtiene $V(T(t)z) < V(z)$, lo cual genera una contradicción. Por tanto, $h(T(t)z) = h(z), \forall t \geq 0$ (o $K_j(T(t)z) = K_j(z), \forall t \geq 0$ cuando $0 \leq j \leq n$). En otras palabras, cada $f_j = K_j + h$ satisface

$$f_j(T(t)z) = f_j(z), \quad \forall t \geq 0.$$

De la proposición 4.12, se obtiene $z \in (A_j \cup A_j^*)$ cuando $0 \leq j \leq n$. Es decir,

$$z \in \bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$$

(teorema 4.10) y se obtiene (9). Para concluir, se afirma que para todo $z \in X$,

$$z \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i \implies V(T(t)z) = V(z), \forall t \geq 0 \tag{10}$$

En efecto, sea $z \in \bigcup_{j=1}^{n} E_j = \bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A_j^*)$. Para cada $0 \leq j \leq n$ se obtiene que $z \in A_j \cup A_j^*$.

- Si $z \in A_j$ se cumple que $T(t)z \in A_j \subset \mathscr{A}, \forall t \geq 0$ y así $h(T(t)z) = 0$ y $K_j(T(t)z) = 0, \forall t \geq 0$, luego $V(T(t)z) = h(T(t)z) + \sum_{j=0}^{n} K_j(T(t)z) = 0, \forall t \geq 0$. En particular,

$$V(T(t)z) = V(z) = 0, \forall t \geq 0.$$

- Si $z \in A_j^*$, cada $K_j(T(t)z) = 1$ y $h(T(t)z) = 0, \forall t \geq 0$. Es decir,
$$V(T(t)z) = V(z) = n, \forall t \geq 0.$$

Esto demuestra (10). En otras palabras,

$\diamond$ $V(T(t)x) = V(x), \forall t \geq 0$ si y sólo si $x \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i$.

En consecuencia V satisface la definición 4.6. Por lo tanto, $T(\cdot)$ es un semigrupo gradiente con respecto a $\mathscr{S}$. $\square$

Ejemplo 4.14. Del resultado del ejemplo 4.5, se concluye que $T(\cdot)$ es un semigrupo gradiente respecto a la familia invariante aislada $\mathscr{S} = \{E_1, E_2, E_3\}$.

5. Estabilidad de semigrupos gradiente bajo perturbación

En esta sección, se presenta la aplicación de toda la teoría desarrollada en las secciones anteriores.

Definición 5.1. *El semigrupo $T(\cdot)$ se dice que es **asintóticamente compacto** si cada sucesión acotada $x_k \in X$ satisface lo siguiente: por cada sucesión $t_k \geq 0$ con $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = +\infty$, se obtiene que la sucesión inducida $T(t_k)x_k$ admite una subsucesión convergente.*

Con el objeto de aclarar y explicar mejor este concepto, se presenta el siguiente ejemplo sencillo:

Ejemplo 5.2. El semigrupo $T(\cdot)$ en $X = \mathbb{R}^n$ para el cual la órbita de cada conjunto acotado es acotada (semigrupo acotado) es un ejemplo natural de un semigrupo asintóticamente compacto.

Teorema 5.3. *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo sobre un espacio de Banach X que es gradiente con respecto a una colección finita $\mathscr{S}$ de conjuntos invariantes aislados $\{E_1, \ldots, E_n\}$. Si $\mathscr{A}$ es un atractor global para $T(\cdot)$ y se cumple:*

1. *Para cada $\eta \in (0,1]$, $T_\eta(\cdot)$ es un semigrupo en X con atractor global $\mathscr{A}_\eta$;*
2. *$\{T_\eta(\cdot)\}_{\eta\in[0,1]}$ es una colección de semigrupos asintóticamente compacto y $\overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathscr{A}_\eta}$ es acotada;*
3. *$T_\eta(\cdot)$ converge a $T(\cdot)$, en el sentido que*
$$d\big(T_\eta(t)u, T(t)u\big) \to 0 \text{ cuando } \eta \to 0, \tag{11}$$
uniformemente para cada u en un subconjunto compacto de X; y
4. *Para cada $\eta \in (0,1]$, $\mathscr{A}_\eta$ contiene una colección finita de conjuntos invariantes aislados $\mathscr{S}_\eta = \{E_1^\eta, \ldots, E_n^\eta\}$ de modo que*
$$\lim_{\eta\to 0} d_H(E_j^\eta, E_j) = 0$$
y existen $\delta > 0$ y $\eta_1 \in (0,1)$ de modo que para todo $\eta \in (0,\eta_1)$, si $\xi_\eta : \mathbb{R} \to \mathscr{A}_\eta$ es una solución global, entonces
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d(\xi_\eta(t), E_j^\eta) \leq \delta \implies \xi_\eta(t) \in E_j^\eta \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Entonces existe un $\eta_0 > 0$ de modo que, para todo $\eta \in (0,\eta_0)$, $T_\eta(\cdot)$ es un semigrupo gradiente con respecto a $\mathscr{S}_\eta$. En particular
$$\mathscr{A}_\eta = \bigcup_{i=1}^{n} W(E_i^\eta).$$

Demostración. La demostración aparece en el libro de Carvalho et al. (2013). $\square$

Los siguientes ejemplos ilustran adecuadamente las propiedades del teorema 5.3.

Ejemplo 5.4. La ecuación diferencial
$$\dot{x} = -x(x-\eta)(x+\eta), \; x \in \mathbb{R} \text{ y } \; \eta \in [0,1]$$
induce para cada η un semigrupo $T_\eta(\cdot)$. Cuando $\eta = 0$, el semigrupo $T_0(\cdot)$ tiene un atractor global $\mathscr{A} = \{0\}$ y es gradiente con respecto a $\mathscr{S} = \{E\}$ (ejemplo 4.7). Además, se cumple lo siguiente:

1. Para cada $\eta \in (0,1]$, $T_\eta(\cdot)$ es un semigrupo en $\mathbb{R}$ con atractor global $\mathscr{A}_\eta = [-\eta, \eta]$.
2. Por el ejemplo 5.2, la colección de semigrupos $\{T_\eta(\cdot)\}_{\eta\in[0,1]}$ es asintóticamente compacto y $\overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathscr{A}_\eta} = [-1,1]$ es acotada.
3. Sea $x \in [-m\eta\ ,\ m\eta]$, donde $m \in \mathbb{Z}$ y $m \geq 1$, luego
$$|T_\eta(t)x - T_0(t)x| \leq 2m\eta$$
implica
$$\lim_{\eta\to 0} |T_\eta(t)x - T_0(t)x| \leq \lim_{\eta\to 0} 2m\eta = 0.$$
4. Para $\eta \in (0,1]$, $\mathscr{S}_\eta = \{\mathscr{A}_\eta\} = \{E^\eta\}$
$$\lim_{\eta\to 0} d_H(E^\eta, E) = \lim_{\eta\to 0} \sup_{a\in E^\eta} d(a, \{0\}) = 0.$$
Por otro lado, desde que $\xi_\eta : \mathbb{R} \to \mathscr{A}_\eta$ es una solución global, existen $\delta = \frac{1}{2}$ y $\eta_1 = \frac{1}{10}$ de modo que para todo $\eta \in (0,\eta_1)$ se cumple (12).

Por el teorema 5.3, existe un $\eta_0 > 0$ de modo que, para todo $\eta \in (0,\eta_0)$, $T_\eta(\cdot)$ es un semigrupo gradiente con respecto a S_η.

Ejemplo 5.5. La ecuación diferencial
$$\dot{x} = -x(x-\eta-1)(x+\eta+1), \; x \in \mathbb{R} \text{ y } \; \eta \in [0,1]$$
induce para cada η un semigrupo $T_\eta(\cdot)$. Cuando $\eta = 0$, el semigrupo $T_0(\cdot)$ tiene un atractor global $\mathscr{A} = [-1,1]$ y es gradiente con respecto a $\mathscr{S} = \{E_1, E_2, E_3\}$ donde $E_1 = \{-1\}$, $E_2 = \{1\}$ y $E_3 = \{0\}$ (ejemplo 4.4). Además:

1. Para cada $\eta \in (0,1]$, $T_\eta(\cdot)$ es un semigrupo sobre $\mathbb{R}$ con atractor global $\mathscr{A}_\eta = [-\eta-1, \eta+1]$.
2. Por el ejemplo 5.2, la colección de semigrupos $\{T_\eta(\cdot)\}_{\eta\in[0,1]}$ es asintóticamente compacto y $\overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathscr{A}_\eta} = [-2,2]$ es acotada.

3. $T_\eta(\cdot)$ converge a $T(\cdot)$, uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.
   Sea $x \in \mathscr{A} = [-1,1] = \bigcup_{m\in[\frac{1}{\eta},1]} [-1;-1+m\eta) \cup \{0\} \cup (1-m\eta,1]$, luego $x \in [-1;-1+m\eta)$ ó $x = 0$ ó $x \in (1-m\eta,1]$, para algún $m \in [\frac{1}{\eta},1]$. Si $x = 0$, se cumple trivialmente (11). Si $x \in [-1;-1+m\eta) \cup (1-m\eta,1]$, se tiene que $|T_\eta(t)x - T_0(t)x| \leq (m+1)\eta$, y se cumple (11). Si $x \in [-k\eta+1, k\eta+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, $\eta \in (0,1]$, entonces $|T_\eta(t)x - T_0(t)x| \leq k\eta$, y se cumple (11).

4. Para $\eta \in (0,1]$, $\mathscr{A}$ contiene una colección finita de conjuntos invariantes aislados $\mathscr{S}_\eta = \{E_1^\eta, E_2^\eta, E_3^\eta\}$ donde $E_1^\eta = \{-\eta - 1\}$, $E_2^\eta = \{\eta+1\}$ y $E_1^\eta = \{0\}$ y se cumple que
   $$\lim_{\eta\to 0} d_H(E_j^\eta, E_j) = 0.$$
   Además, se observa que para cada solución global $\xi_\eta : \mathbb{R} \to \mathscr{A}_\eta$ se cumple (12), cuando $\delta > 0$ y $\eta \in (0,1)$.

Por el teorema 5.3, existe un $\eta_0 > 0$ de modo que, para todo $\eta \in (0,\eta_0)$, $T_\eta(\cdot)$ es un semigrupo gradiente con respecto a S_η.

6. Agradecimiento

Este trabajo es parte del proyecto intitulado «estudio de atractores globales en sistemas no–autónomos» que fue parcialmente apoyado por la UNMSM, con número: 151401215. La autora agradece a los revisores por hacer un reporte detallado del manuscrito y por enviarnos valiosas sugerencias, las cuales se incluyeron para mejorar la presentación del trabajo.

REFERENCIAS

Aragão Costa, E. R., Caraballo, T., Carvalho, Alexandre N., and Langa, José A. (2011). Stability of gradient semigroups under perturbations *Nonlinearity*, 24 (7), 2099–2117. MR 2805595.
https://www.doi.org/10.1088/0951-7715/24/7/010

Bortolan, Matheus C. and Carvalho, Alexandre N. and Langa, José A. (2020) *Attractors under autonomous and non-autonomous perturbations* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 246 American Mathematical Society, Providence, RI 2020 MR 4249447

Carvalho, Alexandre N., Langa, José A., Robinson, James C. and Suárez, Antonio. (2007) Characterization of non-autonomous attractors of a perturbed infinite-dimensional gradient system. *J. Differential Equations* 236 (2), 570–603. MR 2322025 https://doi.org/10.1016/j.jde.2007.01.017

Carvalho, Alexandre N. and Langa, José A. (2009) An extension of the concept of gradient semigroups which is stable under perturbation. *J. Differential Equations*, 246 (7), 2646–2668. MR 2503016 https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.01.007

Carvalho, Alexandre N. and Langa, José A. and Robinson, James C. (2013). *Attractors for infinite dimensional non autonomous dynamical systems*. South Melbourne, Australia: Thomson. Applied Mathematical Sciences, vol. 182, Springer, New York, 2013. MR 2976449

Chicone, Carmen (2006). *Ordinary differential equations with applications*. 2nd ed., Texts in Applied Mathematics, vol 34, Springer, New York, 2006. MR 2224508

Gavilán, Maruja (2019) *Funciones de Lyapunov y semigrupos tipo-gradiente*. Tesis para optar grado de magíster en matemática pura, Unidad de Posgrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú, diciembre 2019.
http://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/cybertesis/11586

Hale, Jack, K. (2004). Stability and gradient dynamical systems. *Rev. Mat.Complut*, 17 (1), 7–57. MR 2063940 https://doi.org/10.5209/rev_REMA.2004.v17.n1.16767

Hale, Jack, K. (1980). *Ordinary differential equations*. 2nd ed., Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Huntington, N.Y., 1980. MR 587488

Marín, Gayte, Irene (2016) *Dinámica global de sistemas mutualistas*. Trabajo de fin de grado, Facultad de matemáticas, Universidad de Sevilla, Sevilla, España, 2016, http://hdl.handle.net/11441/43805

Raugel, G. (2002). *Global attractors in partial differential equations*, Handbook of dynamical systems, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 885–982. MR 1901068 (2003f:37151)

Krzysztof P. Rybakowski, (1987). *The homotopy index and partial differential equations*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1987. MR 910097 (89d:58025)

BIOGRAFÍA

Maruja Gavilán Gonzales, es Magíster en Matemática Pura por la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM) (Perú). Premio Sofia Kovalevskaia a la mejor tesis de maestría 2020. Docente a tiempo completo en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos desde el año 2009 hasta la actualidad. Reconocimiento al mérito en el desempeño docente en el 2020.

Apéndice A: Ecuaciones diferenciales autónomas

Tal como se describe en el libro texto de Hale (1980), cada función contínua en un abierto euclidiano induce una ecuación diferencial, de modo que las soluciones siempre existen. Es más, la continuidad de las derivadas garantizan la unicidad de las soluciones y se obtienen así ejemplos de semigrupos. Específicamente, se considera el siguiente problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable. Consecuentemente, esta función f es *localmente Lipschitz*: para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existen dos constantes $\delta > 0$ y $L > 0$ tales que las desigualdades $||x - x_0|| < \delta$ y $||y - x_0|| < \delta$ implican que

$$||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y||.$$

Una *solución* de (13) es una función continuamente diferenciable $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$, definida en un intervalo abierto que contiene al cero tal que

$$\frac{d}{dt}\big(\varphi(t)\big) = f\big(\varphi(t)\big), \forall t \qquad \varphi(0) = x_0. \tag{14}$$

La función $\phi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ es llamada *solución maximal* si por cada solución $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ que satisface $(\alpha, \beta) \subset I$ y $\phi = \varphi|_{(\alpha,\beta)}$, se obtiene $(\alpha, \beta) = I$, y consecuentemente $\phi = \varphi$.

Ejemplo 6.1. Si $y_0 \in \mathbb{R}$ es positivo, la solución de $\dot{x} = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ que envía $t_0 = 0$ en y_0 satisface

$$\varphi(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t}, \quad t \in \left(-\infty, \frac{1}{y_0}\right).$$

Además, $|\varphi(t)| \to +\infty$ cuando $t \to \frac{1}{y_0}$.

En el problema (13) se cumple el siguiente teorema. La prueba se obtiene a partir de la teoría descrita en el libro texto de Chicone, C. (2006).

Teorema 6.2. *Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe una solución maximal de* (13) *que satisface las siguientes propiedades.*

1. *Si $\psi\colon J \to \mathbb{R}^n$ satisface* (14) *en el intervalo abierto $J \ni 0$, entonces $\psi(t) = \varphi(t)$ para todo $t \in I \cap J$. Consecuentemente, la solución maximal es única.*

2. *Si*
$$(\alpha, \beta) \ni t \mapsto \phi(t, x_0) \in \mathbb{R}^n$$
denota la solución maximal de (13)*, entonces $\beta = +\infty$ o bien $\beta < +\infty$ y $\{\phi(t, x_0) : 0 \leq t < \beta\}$ intersecta el complemento de cualquier compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.*

3. *Si $I(x_0)$ denota el dominio de la solución maximal, entonces el conjunto*
$$\bigcup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} I(x_0) \times \{x_0\}$$
es abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Además, en este conjunto abierto la regla de correspondencia $(t, x) \mapsto \phi(t, x)$ genera una función continuamente diferenciable tal que

$$\begin{aligned} \phi(0, x) &= x, \\ \phi(t + s, x) &= \phi\big(t, \phi(s, x)\big), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad s, t + s \in I(x). \end{aligned}$$

Si se asume que existe una constante $r_0 > 0$ tal que

$$||x|| \geq r_0 \implies f(x) \cdot x < 0, \tag{15}$$

donde $\cdot$ denota el producto usual de $\mathbb{R}^n$. A partir del teorema 6.2, se obtiene que la solución maximal está definida en un intervalo de longitud infinita. Específicamente, (15) implica que el dominio $I(x_0)$ de la solución maximal de (13) incluye al intervalo $[0, +\infty)$. En este contexto, la familia de funciones continuas $T(t)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por medio de la regla

$$T(t)x_0 = \phi(t, x_0) \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \quad t \geq 0$$

está bien definida y forma un semigrupo en $X = \mathbb{R}^n$, pues se construye a partir de soluciones maximales. Esto se describe en la monografía de Bortolan et al. (2020).

Ejemplo 6.3. En el plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + P(x^2 + y^2)x, \\ \dot{y} = \ \ x + P(x^2 + y^2)y. \end{cases} \tag{16}$$

donde $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aplicación polinomial que admite una raíz $r_0 > 0$ tal que

$$r_0 = \text{máx}\{r \in \mathbb{R} : P(r) = 0\} \implies P'(r_0) < 0.$$

En este contexto, en el sistema (16) se cumple (15) y por lo tanto las soluciones maximales definen un semigrupo en $\mathbb{R}^2$. En las coordenadas polares (r, θ), dadas por las igualdades $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, el sistema (16) toma la forma

$$\begin{cases} \dot{r} &= rP(r^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases}$$

Cabe mencionar que las raíces del polinomio P inducen ciclos límite para (16). En el caso especial del polinomio $P(u) = 1 - u$ (satisface $P'(1) < 0$) la solución maximal que envía el cero en (r_0, θ_0) en coordenadas polares toma la forma:

$$\phi(t, r_0, \theta_0) = \left(\left(\frac{r_0^2 e^{2t}}{1 - r_0^2 + r_0^2 e^{2t}} \right)^{\frac{1}{2}}, \theta_0 + t \right).$$