

Principio de Certeza Máxima (\aleph_{max}) Análisis Teórico de un Nuevo Invariante Probabilístico con Aplicaciones en el Estudio de Tormentas en Quito-Ecuador

Beltrán, Franklin^{1,*} 

¹ IDD.Consultores, Iddresearch.org, Quito, Ecuador

Resumen: Se expone una nueva invariante de tipo probabilístico denominada Certeza Máxima (\aleph_{max}) maximizando el funcional Certeza (\aleph) mediante cálculo variacional, equivalente al principio desarrollado por Euler-Lagrange en el campo determinístico conocido como *Mínima Acción*. Su aparición surge de manera natural al considerar la conservación de la Información que recibe y entrega un sistema probabilístico. El Invariante \aleph_{max} , asociado a una variable aleatoria continua T , equilibra la *función de Conocimiento* $C(t)$; propia de cada función de densidad probabilística $f(t)_{max}$, y la *función de Información* $I(t) = -\ln(f(t)_{max})$. Se inicia demostrando \aleph_{max} para la función de distribución acumulada exponencial truncada y se amplía como principio para otras familias de distribuciones de probabilidad, tanto continuas como discretas, tanto acotadas como no acotadas. Cuando la variable aleatoria t tiene unidad de tiempo truncada en DT , la función de distribución acumulada $P(t)_{max}$ obtenida es la curva en el tiempo más probable entre todas las posibles. La modelación de patrones de tormentas estocásticas en Quito-Ecuador mediante la Distribución Exponencial Cuadrática Truncada (con parámetro $g=9,8$) se presenta como ejemplo de uso, entre otros.

Palabras clave: Certeza Máxima, Distribución Truncada, Invarianza, Mínima Acción, Tormentas en Quito, MIT-Q

Maximum Certainty Principle (\aleph_{max}) Theoretical Analysis of a New Probabilistic Invariant with Applications in the Study of Rainstorms in Quito-Ecuador

Abstract: A new probabilistic invariant named Maximum Certainty (\aleph_{max}) is exposed finding the extremum of the Functional Certainty (\aleph) with variational calculus, equivalent to the principle developed by Euler-Lagrange in the deterministic field known as *Least Action*. Its emergence comes naturally when regard the conservation of the Information received and delivered by a probabilistic system. The invariant \aleph_{max} associated to a random variable T , balances the *Knowledge function* $C(t)$; of each probabilistic density function $f(t)_{max}$, and *Information function*: $I(t) = -\ln(f(t)_{max})$. It starts by proving \aleph_{max} for the truncated exponential cumulative distribution function and is extended as a principle to other probability distribution families, both continuous and discrete both bounded and unbounded. When the random variable T has units of time, truncated in DT , the cumulative distribution function $P(t)_{max}$ obtained is the most probable time curve among all the possible ones. The modeling of stochastic storm patterns in Quito-Ecuador through the Truncated Quadratic Exponential Distribution (with parameter $g=9.8$) is given as an example of application, among others.

Keywords: Maximum Certainty, Truncated Distribution, Invariance, Least action, Storms in Quito, MIT-Q

1. INTRODUCCIÓN

Las leyes de conservación como la de energía, la de cantidad de movimiento o la de carga eléctrica, son piedras angulares en la física moderna, son verdaderas “super leyes” que garantizan se conservarán ciertas magnitudes físicas propias del sistema (Lévy-Leblond, 2002). A la luz del paso del

tiempo, la ciencia ha encontrado una manera más profunda y bella de formular leyes fundamentales de la física mediante el uso de principios de mínimo y en especial el principio de mínima acción (Feynman et al., 2010).

Landau y Lifshitz (1994) indican que la formulación más general de la ley del movimiento de los sistemas mecánicos es

*fabeltran@iddresearch.org
Recibido: 26/10/2022
Aceptado: 24/08/2023
Publicado en línea: 14/11/2023
10.33333/rp.vol52n2.05
CC 4.0

el principio de mínima acción (o principio de Hamilton). Según este principio, todo sistema mecánico está caracterizado por una función Lagrangiana \mathcal{L} dependiente de sus coordenadas y velocidades generalizadas. En los instantes t_1 y t_2 , el sistema se mueve entre dos posiciones dadas de manera que la integral $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$, denominada *acción*, toma el menor valor posible. El principio de Hamilton expresa que el verdadero movimiento de una partícula se presenta en un punto estacionario de un *Funcional* dentro de un conjunto de todos los posibles recorridos que inician en un punto al instante t_1 y termina en otro al instante t_2 (Berdichevsky, 2009).

Entre lo observado, no deja de inquietar la falta de un principio subyacente que explique una conducta conservativa de tipo probabilístico de fenómenos naturales a toda escala. ¿Es acaso posible encontrar un principio fundamental de conservación en el campo probabilístico similar al Principio de Mínima Acción (PmA)? La pregunta surge en busca de interpretar el importante ajuste observado en la modelación de patrones temporales de eventos individuales de tormentas de lluvia en Quito-Ecuador. El análisis de registros de tormentas identificó patrones temporales de naturaleza aleatoria que mantienen un orden emergente precoz, donde las máximas intensidades de lluvia se presentan preferentemente en sus primeros episodios. El modelo MIT-Q se construyó para simular la representación espacial y temporal de las lluvias sumando la lámina de precipitación de celdas estocásticas individuales sobre un área de 1600 km² (Beltrán, 2021). Los patrones temporales de este fenómeno natural se simularon partiendo de una función exponencial continua y truncada en DT dividida en m trozos iguales, a cada trozo se lo trata como un evento probabilístico sin reemplazo donde el orden de presentación en el tiempo obtenido; denominado arreglo, es de tipo exponencial truncado. En el experimento estadístico, la expresión “evento sin reemplazo o sin reingreso” es equivalente a representar una conducta disipativa del fenómeno físico, mediante una sucesión de eventos que una vez presentados no vuelven a repetirse dentro del tiempo de vida DT (Beltrán, 2017; 2019). Similar conducta se puede observar en otros fenómenos naturales tempranamente intensos o precoces como terremotos (Cosentino et al., 1977) o en deslizamientos (Thingbaijam y Mai, 2016).

En la modelación del fenómeno natural, el conjunto de los arreglos de naturaleza aleatoria contiene un máximo probable entre todos los posibles. Esta característica es semejante a la conducta de un *Funcional* en el campo continuo en cuyo punto estacionario la función asociada es extrema sobre todas las trayectorias posibles. Identificar la preferente precocidad de los eventos más intensos de lluvia dentro de un arreglo motivó la búsqueda intuitiva de un principio superior, que debería ser representado con un Funcional equivalente al PmA del campo determinista, que aplicado al campo probabilístico es más adecuado denominarlo Principio de Certeza Máxima (PCM).

En búsqueda del PCM, un obligado campo de análisis es la teoría de la Entropía y sus partes esenciales a) La Entropía de Shannon y b) El Principio de Máxima Entropía.

Shannon (1948) formuló el concepto de Entropía como una medida de información o incertidumbre. La incertidumbre sobre la ocurrencia de un evento aleatorio está asociada al conjunto de los posibles valores de la variable aleatoria. La información se obtiene experimentando el evento aleatorio. Si un evento es muy recurrente, transmite poca información. Complementariamente, se requiere más información para describir eventos menos probables o más inciertos. La información que emerge como resultado de la ocurrencia de un evento con probabilidad p es $-\log(p)$. Este concepto puede ser extendido a N eventos ocurriendo con probabilidad p_1, p_2, \dots, p_N . La información que emerge por la ocurrencia conjunta de los N eventos es $\sum_{i=1}^N \log p_i$ y la información promedio, conocida como Entropía de Shannon, es $H = \sum_{i=1}^N p_i \cdot \log p_i$ (Vijay, 2014).

Seguido, Jaynes (1957) establece el Principio de Máxima Entropía (PME) para tratar problemas que analizan la predicción. Dada una variable aleatoria T , donde se dispone de algún tipo de información, la distribución de probabilidad escogida debería ser consistente con la información disponible. El PME establece que la distribución de probabilidad debería ser seleccionada de tal manera que maximice la entropía relacionada con la información dada. Intuitivamente las distribuciones de más alta entropía representan más desorden, son menos predecibles y asumen menos (Vijay, 2014). La maximización de la entropía no es una aplicación de una ley de la física, es simplemente un método de razonamiento que asegura que no se han introducido supuestos arbitrarios inconscientes (Jaynes, 1957).

El análisis de estos dos importantes principios; PmA y PME, ha dejado espacio para el planteamiento del PCM. Se inicia examinando el concepto de Funcional y específicamente el Funcional Exponencial Truncado identificado en el estudio de tormentas en Quito.

2. FUNCIONAL EXPONENCIAL TRUNCADO

Para llegar al Funcional Exponencial Truncado (FET) utilizado en el estudio de tormentas es necesario observar las cualidades de la distribución exponencial, tanto en el campo continuo como en el discreto.

2.1. Función de Distribución Acumulada Exponencial

Se dice que una variable aleatoria continua T es exponencial si su función de densidad de probabilidad (FDP) es (Ross, 2010):

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

La función de distribución acumulada (FDA) es:

$$F(t) = P\{T \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t} \quad t \geq 0, \lambda > 0 \quad (2)$$

La FDP exponencial es una función probabilística que cumple la Ecuación 3:

$$\frac{f(t)'}{f(t)} = -\lambda \quad (3)$$

Lévy-Leblond (2002) expresa que lo específico de este tipo de ecuaciones diferenciales es que enuncian una relación invariable entre cantidades variables y definen lo que cambia en función de lo que no cambia. No puede dejarse sin mencionar la similitud, en su respectivo ámbito, con las leyes de conservación.

2.2. Función de Distribución Exponencial Truncada

2.2.1. Análisis Continuo

La nueva variable aleatoria T representa la duración o el tiempo de vida truncada en DT . El valor de la nueva probabilidad se calcula partiendo de la Ecuación 2. Su resultado corresponde a la función de distribución exponencial truncada en DT , con $\lambda > 0$ y $0 \leq t \leq DT$.

$$F_{T|DT}(t) = P\{T \leq t | T \leq DT\} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda DT}} \quad (4)$$

En la Ecuación 5 y Figura 1 se presentan la FDP exponencial truncada en DT obtenida al derivar la Ecuación 4.

$$f_{T|DT}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda DT}} & 0 \leq t \leq DT \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (5)$$

El valor de la función de densidad inicial f_o y final f_f del periodo DT son iguales a:

$$f_o = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda DT}} \quad (6)$$

$$f_f = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda DT}}{1 - e^{-\lambda DT}} \quad (7)$$

2.2.2. Análisis Discreto

Una variable aleatoria es discreta si los elementos del conjunto de valores posibles pueden ser enumerados sin repetición en una secuencia indexada de números enteros. En el caso del tiempo, éste se mide de manera continua y es concebible que la variable aleatoria asuma cualquier valor en el intervalo de estudio. Para conseguir que la variable aleatoria sea discreta, se divide DT en m intervalos Δt de igual magnitud, donde m es un número entero:

$$\Delta t = \frac{DT}{m} \quad (8)$$

Y el intervalo de tiempo t_n expresado de manera discreta como:

$$t_n = n \cdot \frac{DT}{m} \quad (9)$$

La variable aleatoria discreta I representa la jerarquía de la propiedad física dentro del arreglo, por ejemplo: La más intensa, el más fuerte, el más veloz, el más probable ($I = 1$).

La Ecuación 9 se reemplaza en la Ecuación 4 y se obtiene:

$$P(I \leq n | I \leq m) = \frac{1 - e^{-\frac{\lambda DT n}{m}}}{1 - e^{-\lambda DT}} \quad (10)$$

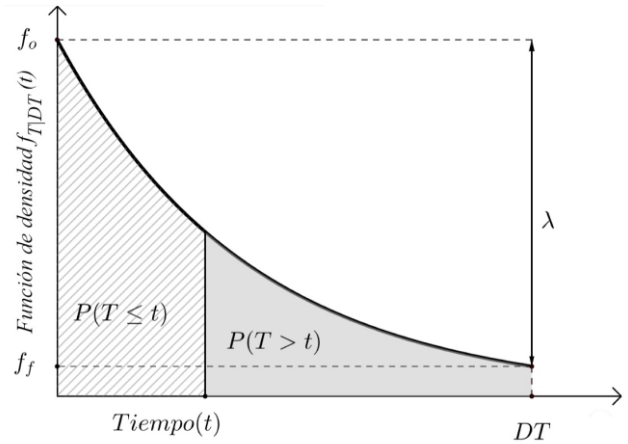


Figura 1. Función de densidad exponencial truncada

Sea:
$$K = e^{-\frac{\lambda DT}{m}} \quad (10)$$

$$P(I \leq n | I \leq m) = \frac{1 - K^n}{1 - K^m} = \frac{K^1 + K^2 + \dots + K^n}{K^1 + K^2 + \dots + K^m}$$

Al denominador se lo nombra K_a :

$$K_a = \sum_{i=1}^m K^i \quad (11)$$

$$P(I \leq n | I \leq m) = \frac{K^1}{K_a} + \frac{K^2}{K_a} + \dots + \frac{K^n}{K_a} \quad (12)$$

Para calcular la probabilidad del n -ésimo evento, se resta la probabilidad del evento con orden menor o igual a n , de la probabilidad del evento con orden menor o igual a $n-1$.

$$P_n = P(I = n | I \leq m) = P(I \leq n | I \leq m) - P(I \leq n-1 | I \leq m)$$

$$P_n = \left(\frac{K^1}{K_a} + \frac{K^2}{K_a} + \dots + \frac{K^n}{K_a} \right) - \left(\frac{K^1}{K_a} + \frac{K^2}{K_a} + \dots + \frac{K^{n-1}}{K_a} \right)$$

$$P_n = \frac{e^{-\lambda DT \cdot \frac{n}{m}}}{\sum_{n=1}^m e^{-\lambda DT \cdot \frac{n}{m}}} \quad (13)$$

P_n es la probabilidad que el n -ésimo evento más intenso o el más fuerte o de mayor jerarquía sea el primero

2.3. Funcional Exponencial Truncado Discreto

Los eventos siguen una línea en el tiempo, el orden de presentación de la variable aleatoria exponencial I variará según su jerarquía. En caso de dos eventos seguidos, se puede presentar el arreglo (1,2) o el arreglo (2,1). En el primer caso, el evento de mayor probabilidad aparece al inicio dejando al evento menos probable al final. En el segundo caso, al inicio se presenta el evento con menor probabilidad y al final el de mayor probabilidad. No se admite el arreglo (1,1) por tratarse de eventos sin reemplazo. De la presentación preferente en el tiempo de los posibles arreglos surgen los denominados "Patrones Temporales".

Los fenómenos naturales que se pueden simular con esta conducta son aquellos donde se disipa alguna propiedad como la energía, la temperatura o la información.

La probabilidad conjunta de un arreglo de m valores se puede calcular a partir de la probabilidad a priori P_n asignada al inicio a cada uno de los eventos y , simular la manifestación de los eventos uno tras otro en el tiempo. La probabilidad a posteriori para el segundo evento aumenta según el siguiente procedimiento:

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_m = 1$$

Después de presentarse el evento $n = 1$ con probabilidad P_1 , la probabilidad remanente es $1 - P_1$.

$$P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_m = 1 - P_1$$

La nueva probabilidad del evento $n = 2$ se puede calcular con:

$$\frac{P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_m}{1 - P_1} = 1$$

$$\frac{P_2}{1 - P_1} + \frac{P_3}{1 - P_1} + \frac{P_4}{1 - P_1} + \dots + \frac{P_m}{1 - P_1} = 1$$

El primer elemento $\frac{P_2}{1 - P_1}$ representa la probabilidad condicional que se presente el evento $I = 2$ conociendo de antemano que se ha presentado el evento $I = 1$.

Para un tercer evento en el tiempo, la expresión:

$$\frac{P_3}{1 - P_1 - P_2}$$

Representa la probabilidad del evento $I = 3$ conociendo de antemano que se ha presentado el evento $I = 1$ e $I = 2$.

La aparición de un evento aumenta la probabilidad de los eventos restantes o, en otras palabras, la probabilidad a posteriori de los eventos restantes aumenta con el tiempo.

Una vez terminados los m eventos, la probabilidad del arreglo final dependerá de su ordenamiento. Dentro de las leyes de probabilidad se utiliza la regla de la multiplicación $P[A_1 \cap A_2] = P[A_1] \cdot P[A_2|A_1]$ aplicable a eventos independientes o dependientes (Milton, 2005). La probabilidad del arreglo total será igual a la multiplicación de la probabilidad a posteriori de cada evento.

$$P_T = P_1 \cdot \frac{P_2}{1 - P_1} \cdot \frac{P_3}{1 - P_1 - P_2} \dots \frac{P_m}{1 - \sum_{i=1}^{m-1} P_i} \quad (14)$$

En arreglos aleatorios discretos truncados para conocer: ¿Qué puede presentarse en el futuro? se debe registrar, con algún tipo de memoria, lo presentado en el pasado.

Ejemplo 1:

En una tormenta de duración $DT = 1,0 h$ y $\lambda = 2,08$ compuesto por 4 eventos de lluvia. Determinar la probabilidad conjunta del patrón temporal, suponiendo que el evento más intenso se presenta en a) $n = 1$ b) $n = 2$ c) $n = 3$ y d) $n = 4$.

Tabla 1. Probabilidad de Arreglo Temporal

N	I				P_1	P_2	P_3	Prob.
						$1 - P_1$	$1 - P_1 - P_2$	
1	1	2	3	4	0,463	0,513	0,627	0,1491
2	1	2	4	3	0,463	0,513	0,373	0,0887
3	1	3	2	4	0,463	0,305	0,739	0,1045
4	1	3	4	2	0,463	0,305	0,261	0,0369
5	1	4	2	3	0,463	0,181	0,627	0,0527
6	1	4	3	2	0,463	0,181	0,373	0,0314
7	2	1	3	4	0,275	0,639	0,627	0,1105
8	2	1	4	3	0,275	0,639	0,373	0,0657
9	2	3	1	4	0,275	0,226	0,826	0,0515
10	2	3	4	1	0,275	0,226	0,174	0,0108
11	2	4	1	3	0,275	0,134	0,739	0,0274
12	2	4	3	1	0,275	0,134	0,261	0,0097
13	3	1	2	4	0,164	0,554	0,739	0,0671
14	3	1	4	2	0,164	0,554	0,261	0,0237
15	3	2	1	4	0,164	0,329	0,826	0,0446
16	3	2	4	1	0,164	0,329	0,174	0,0094
17	3	4	1	2	0,164	0,116	0,627	0,0120
18	3	4	2	1	0,164	0,116	0,373	0,0071
19	4	1	2	3	0,097	0,513	0,627	0,0314
20	4	1	3	2	0,097	0,513	0,373	0,0186
21	4	2	1	3	0,097	0,305	0,739	0,0220
22	4	2	3	1	0,097	0,305	0,261	0,0078
23	4	3	1	2	0,097	0,181	0,627	0,0111
24	4	3	2	1	0,097	0,181	0,373	0,0066
Total. -								1,0000

El espacio muestral de los posibles arreglos conformados por 4 eventos tiene 24 elementos ($m=4!$). De la Ecuación 10 y la Ecuación 11:

$$K = e^{-\lambda \frac{DT}{m}} = e^{-0,208 \frac{10}{4}} = 0,595$$

$$K_a = \frac{1 - K^m}{1 - K} \cdot K = \frac{1 - 0,595^4}{1 - 0,595} \cdot 0,595 = 1,284$$

La probabilidad a priori P_n se obtiene con la Ecuación 13:

$$P_1 = \frac{K^1}{K_a} = 0,463 \quad P_2 = \frac{K^2}{K_a} = 0,275$$

$$P_3 = \frac{K^3}{K_a} = 0,164 \quad P_4 = \frac{K^4}{K_a} = 0,097$$

La probabilidad de cada arreglo calculada con la Ecuación 14 se indica en la Tabla 1. El más probable con 14,91% es el arreglo (1,2,3,4), seguido el arreglo (2,1,3,4) con 11,05%, en tercer lugar, con 10,45% el arreglo (1,3,2,4) etc. El menos probable es el arreglo (4,3,2,1) con 0,66%. Este último es 22,6 veces menos probable que el arreglo más probable (1,2,3,4). La probabilidad de todos los arreglos suma uno.

Cabe una reflexión al borde del campo determinista. En el Ejemplo 1, si $\lambda = 32$, la probabilidad del arreglo (1,2,3,4) es 99,9% y a la vez 7,02E+20 veces más probable que el arreglo (4,3,2,1). Esto asemeja los resultados de una medición de una variable física en un experimento determinista, donde sus mediciones siempre reflejan un error marginal entre el valor medido y el valor medio. En este escenario pseudo-determinista el arreglo (1,2,3,4) es la norma invariante, el arreglo (4,3,2,1) es válido, pero tendría una probabilidad prácticamente nula (1,42E-21), que de presentarse se consideraría como una eventualidad poco probable, pero ciertamente posible. Complementariamente, si $\lambda = 0$ la

probabilidad de cada uno de los 24 arreglos es igual a $1/24$ expresando una conducta totalmente aleatoria e indeterminada.

La Figura 2 indica los patrones temporales. En cada caso se incluye la probabilidad acumulada del conjunto de los arreglos. Los arreglos cuyo primer elemento es el evento con mayor jerarquía o más intenso ($I = 1$) son los más probables con 46,3% (Figura 2a). El 31,7% de probabilidad corresponde a los arreglos cuyo evento más intenso está en segundo lugar ($I = 2$) (Figura 2b). El 16,8% corresponde a los arreglos donde el evento más intenso aparece en tercer lugar (Figura 2c) y, finalmente un marginal 5,1% corresponden a los arreglos donde el evento más probable aparece al final de la duración de vida DT ($I = 4$) (Figura 2d).

Cada arreglo o recorrido en el tiempo tiene su propia probabilidad de presentarse. Los recorridos con tendencia hacia el límite superior son mucho más probables que aquellos con tendencia al límite inferior. El espacio muestral de los arreglos temporales indicado en la Figura 2 está conformado por todos los caminos posibles que están acotados superiormente por la FDP de la Ecuación 4 con λ positivo e inferiormente con λ negativo. La envolvente continua superior es *óptima*, por *óptima* se entiende como aquella función continua a trozos más probable entre todas las posibles. Lo contrario sucede con la envolvente inferior que será la menos probable entre todas las posibles. Esta es una forma gráfica de representar los patrones temporales preferentes, que pueden representar fenómenos naturales donde se presenta disipación de una cantidad física caracterizados por ser tempranamente intensos o precoces. Los fenómenos naturales intensos por modelar tendrán como valor característico λ , mientras más bajo más aleatorio y difícil de predecir, en tanto, mientras más alto más fácil será expresar su conducta con alguna función determinista, debido a que su conducta será recurrente o la más probable entre todas las posibles. De ahí que lo observado se adapta al conocido PmA.

El Funcional Exponencial Truncado (FET) representa, no uno sino todos los m arreglos permutados (continuos a trozos) de la función exponenciales truncada continua. Para averiguar su naturaleza, se debe iniciar por el concepto de *Funcional*.

Una Funcional asigna funciones $y(x)$ a escalares. Si a toda función $y(x)$ de una cierta clase M le corresponde, según una regla, un número determinado S se dice que en la clase M está definida la funcional S y se escribe $S = S(y(x))$ (Krasnov et al., 1992).

Se probará que la distribución probabilística exponencial de la Ecuación 4, emerge al maximizar un *Funcional* de la forma:

$$S(P(t)) = \int_0^{DT} \mathcal{L}(t, P(t), P(t)') dt \quad (15)$$

Donde el dominio de S es un espacio de funciones $P(t)$, siendo $f(t) = P(t)'$ una función de densidad y $0 \leq t \leq DT$. Por razones de economía se utilizará el símbolo $P(t)$ para representar la probabilidad $P(T \leq t | T \leq DT)$. A la función \mathcal{L} se le conoce como *Lagrangiano*.

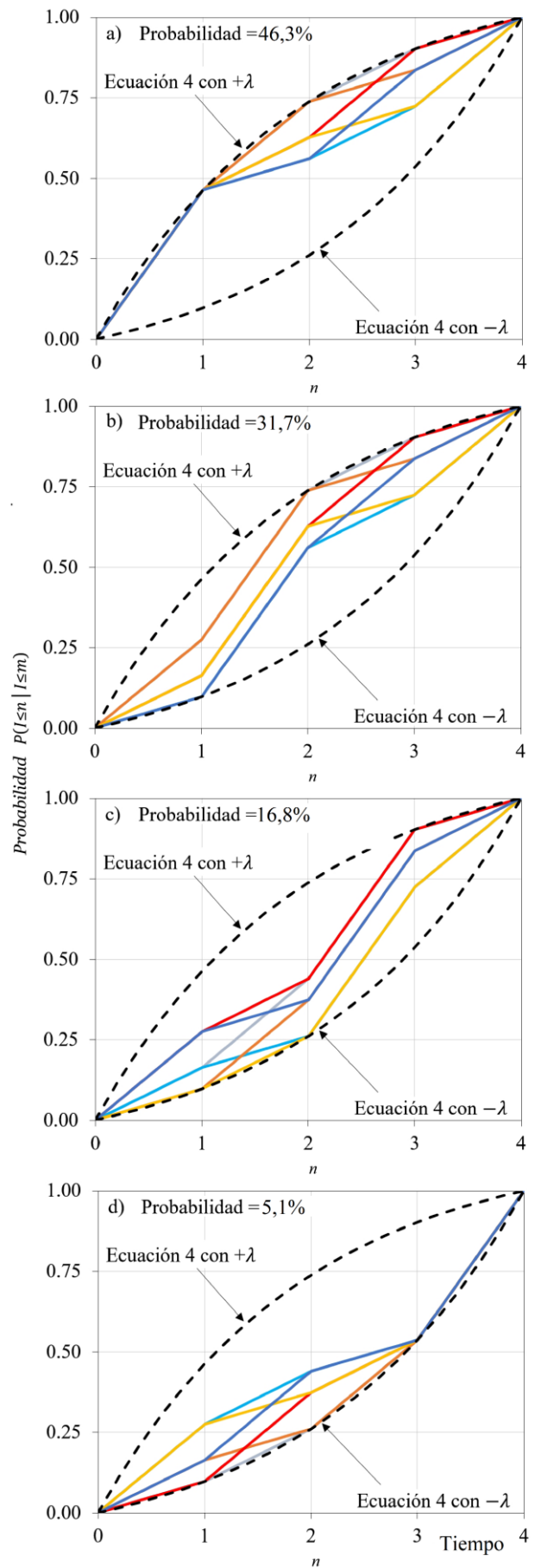


Figura 2. Patrón temporal más intenso en a) $n=1$ b) $n=2$ c) $n=3$ d) $n=4$

Euler en el año 1744, publicó su libro “Método para encontrar curvas con propiedades máximas y mínimas” donde establece la condición necesaria para que el funcional de la clase indicada en la Ecuación 15 alcance su valor extremo. Entre 1760 y 1761 Lagrange profundizó “Un nuevo método para determinar los máximos y los mínimos de fórmulas integrales” (Kreyszig, 1994), y llegó a la misma conclusión que Euler con coordenadas generalizadas. Por este motivo la Ecuación 16 es conocida como la ecuación Euler-Lagrange (Anzaldo et al., 2007).

$$\frac{\partial L}{\partial P(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial P(t)'} \right) = 0 \quad \forall t \in [0, DT] \quad (16)$$

En el campo determinista de la mecánica de partículas, el principio de *Acción Mínima* o Principio de Hamilton asocia un funcional específico S con las posibles trayectorias de la partícula. Enunciar la ley del movimiento de una partícula significa *extremalizar* el funcional S (Anzaldo et al., 2007). Las leyes de movimiento de las partículas, entre todas las trayectorias posibles escogen aquellas donde la Acción o Integral de Acción es la mínima posible.

Para el caso de una variable aleatoria exponencial truncada, la acción identificada, denominada *Certeza* \aleph es:

$$\aleph(P(t)) = \int_0^{DT} f(t) \{-\lambda t - \ln f(t)\} dt \quad (17)$$

Donde λ y DT son > 0 y $f(t)$ es una función de densidad probabilística:

$$\int_0^{DT} f(t) dt = 1 \quad (18)$$

2.3.1 Demostración por Ecuación de Euler-Lagrange

El Lagrangiano de la Ecuación 17 es:

$$L(t, P(t), f(t)) = f(t) \{-\lambda t - \ln f(t)\} \quad (19)$$

Siendo el Lagrangiano explícitamente independiente de $P(t)$, la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial f(t)} \right) = 0 \quad (20)$$

Aplicado al Lagrangiano de la Ecuación 19:

$$\frac{\partial L}{\partial f(t)} = -\lambda t - 1 - \ln f(t) \quad (21)$$

Debido a que la derivada de $\frac{\partial L}{\partial f(t)}$ respecto al tiempo es igual a cero, la $\frac{\partial L}{\partial f(t)}$ es una constante. Por lo que, de la Ecuación 21 se concluye:

$$-\lambda t - \ln f(t)_{max} = Constante \quad (22)$$

La Certeza Máxima de la Ecuación 17 es:

$$\aleph_{max} = \int_0^{DT} f(t)_{max} \{-\lambda t - \ln f(t)_{max}\} dt$$

Debido a que la cantidad en corchetes es independiente del tiempo y por la Ecuación 22:

$$\aleph_{max} = \{-\lambda t - \ln f(t)_{max}\} \int_0^{DT} f(t)_{max} dt$$

Por la Ecuación 18:

$$\aleph_{max} = -\lambda t - \ln f(t)_{max} \quad (23)$$

La Certeza Máxima de la Ecuación 23 es la suma de dos cantidades que pese a variar en el tiempo, suman una constante. En otras palabras \aleph_{max} es un invariante temporal.

Para obtener la FDP que maximiza la Certeza basta con despejar $f(t)_{max}$ de la Ecuación 23:

$$f(t)_{max} = e^{-\aleph_{max}} \cdot e^{-\lambda t} \quad (24)$$

Para obtener el valor \aleph_{max} se reemplaza la Ecuación 24 en la restricción de la Ecuación 18.

$$\int_0^{DT} e^{-\aleph_{max}} \cdot e^{-\lambda t} dt = 1$$

$$\aleph_{max} = -\ln \left(\frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda DT}} \right) \quad (25)$$

Por la Ecuación 6:

$$\aleph_{max} = -\ln(f_o)$$

Al reemplazar la Ecuación 25 en la Ecuación 24 se obtiene finalmente la función de densidad exponencial truncada en el campo continuo que maximiza la Certeza.

$$f(t)_{max} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda DT}} \quad (26)$$

Y su correspondiente función de probabilidad:

$$P(t)_{max} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda DT}} \quad (27)$$

La función $P(t)_{max}$ obtenida es la distribución de probabilística exponencial truncada de la Ecuación 4.

Por otro lado, la función que minimiza la Certeza se obtiene a partir de la Ecuación 23 aceptando que el tiempo avanza desde el futuro hacia el presente, que se consigue al cambiar la variable truncada t por $DT - t$:

$$\aleph_{min} = -\lambda(DT - t) - \ln f(t)_{min} \quad (28)$$

Que cumple con:

$$\aleph_{min} = \aleph_{max} \quad (29)$$

Para obtener $f(t)_{min}$ se utiliza un procedimiento similar al seguido para obtener $f(t)_{max}$:

$$f(t)_{min} = \frac{-\lambda e^{\lambda t}}{1 - e^{\lambda DT}} \quad (30)$$

Y su correspondiente función de probabilidad:

$$P(t)_{min} = \frac{1 - e^{\lambda t}}{1 - e^{\lambda DT}} \quad (31)$$

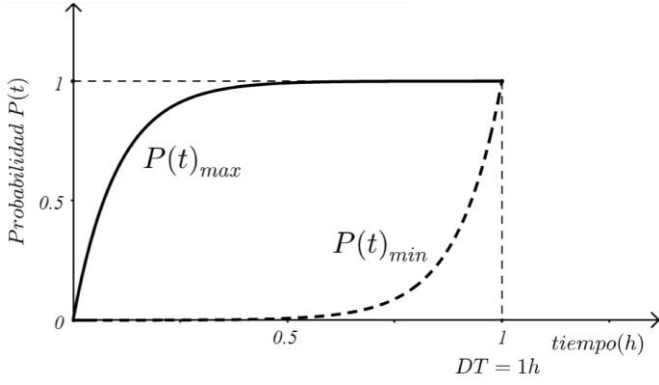


Figura 3. FDA exponencial ($DT = 1\text{ h}$, $\lambda = 9,8$)

La Figura 3 presenta las FDA exponencial truncada $P(t)_{max}$ y $P(t)_{min}$ con máxima y mínima certeza, respectivamente.

El principio de *Mínima Acción* aplicado al campo probabilístico entrega una distribución de probabilidad $P(t)_{max}$ que tiene la certeza máxima para el conocimiento disponible.

3. EQUILIBRIO PROBABILÍSTICO

Aunque se ha determinado el origen de las conductas probabilísticas exponenciales, conocer la acción de la Ecuación 17 no es suficiente para entender el origen último de este tipo de conductas, se propone de aquí en adelante una metodología nueva, que permite dar una interpretación física más adecuada no solo para la distribución exponencial truncada sino también para otras, como la distribución Uniforme, Normal, Weibull, Gamma y otras más.

Se realiza una analogía con el equilibrio en un cuerpo libre, algo que es muy común en el estudio de estática en ingeniería, donde la sumatoria de las fuerzas en estado de equilibrio es igual a cero. En el presente caso, la sumatoria de la información será igual a cero y se utilizará conceptos análogos tales como: Certeza o certidumbre, sorpresa, conocimiento e información, muy comunes a la vida cotidiana para expresar la conducta matemática.

El procedimiento realizado para encontrar la función de densidad de probabilidad exponencial truncada puede generalizarse para otras densidades de probabilidad. Para obtenerlo se propone las siguientes definiciones necesarias, que incluye el enunciado formal de la definición de Información.

1. Al presentarse un evento aleatorio en un tiempo continuo, la *Información* recibida o ganada es $-\ln f(t)$.

La definición formal de Información en el campo discreto expresa que siendo T un suceso que puede presentarse con probabilidad $P(T)$, cuando T tiene lugar, se ha recibido o ganado $I(T) = -\log P(T)$ unidades de información (Abramson, 1981). Para el presente estudio en variables continuas, de manera análoga, se utiliza el valor $-\ln f(t)$, el signo negativo expresa que la información ingresa al sistema. $f(t)$ es la función de densidad probabilística.

2. En todo instante truncado $0 \leq t \leq DT$ existe una información previa relativa al mismo conjunto de información, a la que se denomina *Conocimiento* $C(t)$. $C(t)$ es una cantidad que suma dos funciones monótonas; la Experiencia $E(t)$ y la Creencia $Cr(t)$. La Experiencia se acumula con el tiempo y se caracteriza por $E(0) = 0$, en tanto, $Cr(0)$ puede tomar cualquier valor de $\{-\infty, \infty\}$. En la distribución exponencial $E(t) = -\lambda \cdot t$ y $Cr(t) = 0$.

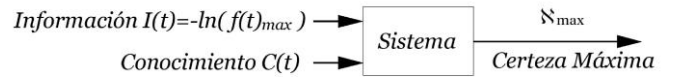
$$\text{Conocimiento } C(t) = E(t) + Cr(t)$$

3. Al presentarse un evento aleatorio, la información resultante está en equilibrio cuando la suma de la información que el sistema recibe y la que entrega es igual a cero. Se entiende que el sistema no es aislado y puede intercambiar información con el exterior.

$$\sum_{\forall t} \text{Información} = 0 \quad (32)$$

La Certeza Máxima \aleph_{max} es una medida de información, invariante en el tiempo, suma la *Información* recibida por el sistema al presentarse el evento y la información acumulada en el pasado, denominada *Conocimiento*. El sistema recibe información temporal variante y entrega información invariante. Ver Figura 4a y 4b.

a)

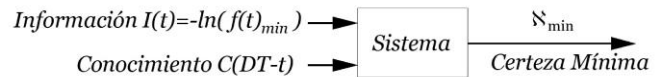


$$\aleph_{max} - C(t) - I(t) = 0$$

$$\aleph_{max} = C(t) + I(t)$$

$$\aleph_{max} = C(t) - \ln(f(t)_{max}) \quad (33)$$

b)



$$\aleph_{min} - C(DT - t) - I(t) = 0$$

$$\aleph_{min} = C(DT - t) + I(t)$$

$$\aleph_{min} = C(DT - t) - \ln(f(t)_{min}) \quad (34)$$

Figura 4. a) Certeza Máxima b) Certeza Mínima

Se define a la *Sorpresa* como la diferencia entre el Conocimiento y la Información.

$$\text{Sor}(t) = C(t) - I(t) \quad (35)$$

En t igual a cero, la Sorpresa recibida al presentarse el evento aleatorio es la más alta. La Sorpresa disminuye conforme el tiempo transcurre. Es análogo a un niño que al recibir una información su sorpresa es alta, en caso de una persona experimentada la misma información crea poca sorpresa.

Al despejar $f(t)_{max}$ de la Ecuación 33 se obtiene:

$$f(t)_{max} = e^{\aleph_{max} - C(t)}$$

Finalmente, con la restricción de la Ecuación 18 se puede demostrar:

$$f(t)_{max} = \frac{e^{C(t)}}{\int_0^{DT} e^{C(t)} dt} \quad (36)$$

$$P(t)_{max} = \frac{\int_0^t e^{C(t)} dt}{\int_0^{DT} e^{C(t)} dt} \quad (37)$$

La Ecuación 36 y la Ecuación 37 son únicamente dependientes de la función Conocimiento y del intervalo de integración.

El Conocimiento $C(t) = -\lambda \cdot t$ y la Información $I(t)$ de la FDP exponencial truncada de la Ecuación 36 se indica en la Figura 5.

Por otro lado, para obtener la FDP con certeza mínima, se despeja $f(t)_{min}$ de la Ecuación 34:

$$f(t)_{min} = e^{-\kappa_{min} + C(DT-t)}$$

Y por lo tanto con la restricción de la Ecuación 18 se obtiene:

$$f(t)_{min} = \frac{e^{C(DT-t)}}{\int_0^{DT} e^{C(DT-t)} dt} \quad (38)$$

La FDA que produce la mínima certeza es:

$$P(t)_{min} = \frac{\int_0^t e^{C(DT-t)} dt}{\int_0^{DT} e^{C(DT-t)} dt} \quad (39)$$

4. APLICACIONES DEL PCM

4.1. Distribuciones Probabilísticas Continuas

La Tabla 2 recopila la función Conocimiento relacionada con funciones de densidad de tipo exponencial de la estadística inferencial, además se incluye el valor de la Certeza Máxima.

La *Distribución Exponencial Truncada Cuadrática* (Ecuación 40 y Ecuación 41) se utilizó en el estudio espacio-temporal de tormentas en Quito-Ecuador (Beltrán, 2019).

$$f(t)_{max} = \frac{2\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})}{(1 - e^{-\lambda DT})^2} \quad (40)$$

$$P(t)_{max} = \left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda DT}} \right)^2 \quad (41)$$

En la distribución Erlang n es elemento de los números naturales positivos (\mathbb{Z}^+). Se observó que la Distribución Quito-Truncada (Ecuación 42 y Ecuación 43), equivalente a una distribución Erlang truncada con $n = 2$, se puede utilizar como alternativa en la modelación de tormentas.

$$f(t)_{max} = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{1 - (\lambda \cdot DT + 1) e^{-\lambda DT}} \quad (42)$$

$$P(t)_{max} = \frac{1 - (\lambda \cdot t + 1) e^{-\lambda t}}{1 - (\lambda \cdot DT + 1) e^{-\lambda DT}} \quad (43)$$

Para la distribución Gamma, la conocida *función Gamma* $\Gamma(\alpha)$ para $\alpha > 0$ es: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt = (\alpha - 1)!$

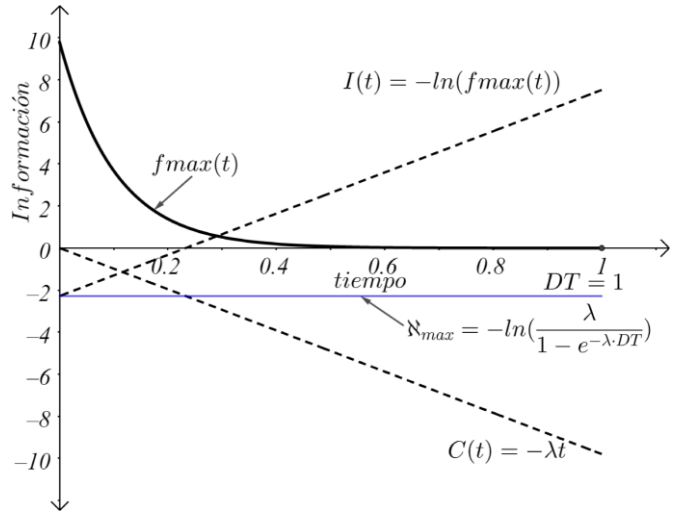


Figura 5. FDP Exponencial truncada obtenido con PCM ($DT = 1, \lambda = 9,8$)

Tabla 2. Conocimiento $C(t) = E(t) + Cr(t)$

Distribución	$E(t)$	$Cr(t)$	Certeza Máxima
Uniforme	0	0	$-\ln\left(\frac{1}{b-a}\right)$
Exponencial	$-\lambda t$	0	$-\ln(\lambda)$
Exponencial Truncada	$-\lambda t$	0	$-\ln\left(\frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda \cdot DT}}\right)$
Exponencial Truncada Cuadrática	$-\lambda t$	$\ln(1 - e^{-\lambda t})$	$-\ln\left(\frac{2\lambda}{(1 - e^{-\lambda \cdot DT})^2}\right)$
Quito Truncada	$-\lambda t$	$\ln(t)$	$-\ln\left(\frac{\lambda^2}{1 - (\lambda DT + 1) e^{-\lambda DT}}\right)$
Normal	$-\frac{1}{2} \left(\frac{t-u}{\sigma}\right)^2$	0	$-\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$
Erlang	$-\lambda t$	$(n-1) \ln(t)$	$-\ln\left(\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\right)$
Weibull	$-(\lambda t)^\alpha$	$(\alpha-1) \ln(t)$	$-\ln(\alpha \lambda^\alpha)$
Raileigh	$-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{\sigma}\right)^2$	$\ln(t)$	$-\ln\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$
Gamma	$-\lambda t$	$(\alpha-1) \ln(t)$	$-\ln\left(\frac{\lambda^\alpha}{(\alpha-1)!}\right)$

En la distribución Normal, μ es la media ($-\infty < \mu < \infty$), σ es la desviación estándar ($\sigma > 0$) y t es el tiempo con límite de integración de $-\infty$ a ∞ .

Ejemplo 2:

Utilizar el PCM y obtener la distribución probabilística con Conocimiento nulo en el intervalo truncado $(0, DT)$

El Conocimiento de la distribución uniforme de la Tabla 2 es $C(t) = 0$ y con la Ecuación 36 y Ecuación 37 se obtiene:

$$f(t)_{max} = \frac{e^0}{\int_0^{DT} e^0 dt} = \frac{1}{\int_0^{DT} dt} = \frac{1}{DT}$$

$$P(t)_{max} = \frac{\int_0^t e^{C(t)} dt}{\int_0^{DT} e^{C(t)} dt} = \frac{\int_0^t e^0 dt}{\int_0^{DT} e^0 dt} = \frac{\int_0^t dt}{\int_0^{DT} dt} = \frac{t}{DT}$$

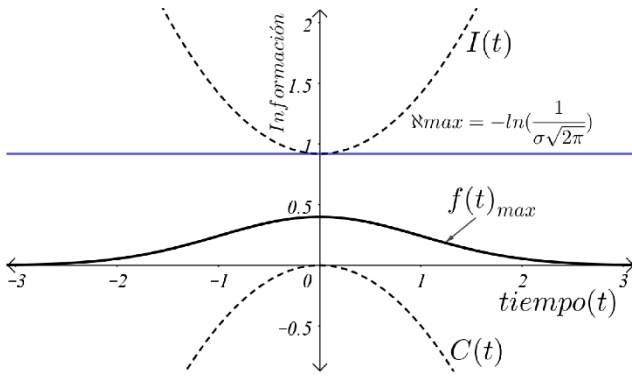


Figura 6. Certeza Máxima - Distribución Normal ($\mu = 0, \sigma = 1$)

Ejemplo 3:

Utilizar el PCM y obtener la distribución probabilística normal truncada en un intervalo $(u - DT, u + DT)$.

El Conocimiento de la Tabla 2 para la distribución Normal Truncada es $C(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{t-u}{\sigma} \right)^2$. Con la Ecuación 36 se tiene.

$$f(t)_{max} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-u}{\sigma} \right)^2}}{\int_{u-DT}^{u+DT} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-u}{\sigma} \right)^2} dt}$$

$$f(t)_{max} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-u}{\sigma} \right)^2}}{\sigma \sqrt{2\pi} \cdot \text{erf} \left(\frac{DT}{\sigma \sqrt{2}} \right)}$$

Donde erf es la función de error de Gauss:

$$\text{erf} \left(\frac{DT}{\sigma \sqrt{2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{DT}{\sigma \sqrt{2}}} e^{-t^2} dt$$

La \aleph_{max} de la distribución Normal truncada es:

$$\aleph_{max} = -\ln \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi} \cdot \text{erf} \left(\frac{DT}{\sigma \sqrt{2}} \right)} \right\}$$

Para una distribución Normal no truncada con $DT = \infty$, la función de error es:

$$\text{erf} \left(\frac{DT}{\sigma \sqrt{2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

Y la función de densidad normal no truncada obtenida es:

$$f(t)_{max} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-u}{\sigma} \right)^2}}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

La \aleph_{max} de la distribución Normal sin truncamiento es:

$$\aleph_{max} = -\ln \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right\}$$

La Figura 6 presenta el Conocimiento $C(t)$ y la Información $I(t)$ de la FDP Normal.

La atemporalidad de la Certeza Máxima es un atributo de las distribuciones probabilísticas que se presenta en todo tiempo

t , es una ley a la que se rigen las variables aleatorias con un Conocimiento $C(t)$ mandatorio.

4.2. Distribuciones Probabilísticas Discretas

Para una variable aleatoria discreta uniformemente espaciada $f(n) = P_n$ y $t = n \cdot \frac{DT}{m}$, la Certeza discreta \aleph se obtiene de la Ecuación 17:

$$\aleph(P_n) = \sum_{n=1}^m P_n \left(-\lambda \cdot DT \cdot \frac{n}{m} - \ln P_n \right) \quad (44)$$

$$\aleph(P_n) = \sum_{n=1}^m -\lambda \cdot DT \cdot \frac{n}{m} \cdot P_n - \sum_{n=1}^m P_n \cdot \ln P_n \quad (45)$$

Con restricción:

$$\sum_{n=1}^m P_n = 1 \quad (46)$$

El término de la derecha en la Ecuación 45 es la conocida Entropía de Shannon H en el campo discreto.

a) Por el PCM para una distribución uniforme discreta:

$$\aleph_{max} = 0 - \ln P_n$$

$$P_n = e^{\aleph_{max}} \quad (47)$$

Se reemplaza la Ecuación 47 en la Ecuación 46.

$$\sum_{n=1}^m e^{\aleph_{max}} = 1$$

$$e^{\aleph_{max}} = \frac{1}{m}$$

$$P_n = \frac{1}{m} \quad (48)$$

Donde no hay Conocimiento disponible los eventos son equiprobables y no es posible distinguirlos uno de otro.

b) Por el PCM, para una distribución exponencial discreta

$$\aleph_{max} = -\lambda \cdot DT \cdot \frac{n}{m} - \ln P_n \quad (49)$$

P_n se despeja de la Ecuación 49.

$$P_n = e^{-\aleph_{max}} \cdot e^{-\lambda \cdot DT \cdot \frac{n}{m}} \quad (50)$$

Para obtener \aleph_{max} se reemplaza la Ecuación 50 en la Ecuación 46:

$$\aleph_{max} = -\ln \left(\frac{1}{\sum_{n=1}^m e^{-\lambda \cdot DT \cdot \frac{n}{m}}} \right)$$

\aleph_{max} se reemplaza en la Ecuación 50 y se obtiene la conocida probabilidad truncada discreta de la Ecuación 13:

$$P_n = \frac{e^{-\lambda \cdot DT \cdot \frac{n}{m}}}{\sum_{n=1}^m e^{-\lambda \cdot DT \cdot \frac{n}{m}}}$$

4.3. Máxima Verosimilitud

En estadística inferencial la estimación de los parámetros de una FDP puede hacerse por el método de máxima verosimilitud. El objetivo en la inferencia es obtener información sobre la población a partir de la muestra. Para una muestra aleatoria de tamaño n de una variable aleatoria T . La función de verosimilitud es la función de densidad conjunta de la muestra $L(\theta, t_i) = \prod_{i=1}^n f(t_i|\theta)$ (Bande et al., 2008). Se demuestra que la función de verosimilitud surge del PMC.

La sumatoria para cada valor t_i de la Ecuación 33 de una muestra estadística es:

$$\sum_{i=1}^n \aleph_{max} = \sum_{i=1}^n C(t_i) - \sum_{i=1}^n \ln(f(t_i)_{max})$$

Donde $f(t_i)_{max}$ depende de los parámetros estadísticos que describen los datos.

$$\begin{aligned} n \cdot \aleph_{max} &= \sum_{i=1}^n C(t_i) - \ln \prod_{i=1}^n f(t_i)_{max} \\ \ln \prod_{i=1}^n f(t_i)_{max} &= \sum_{i=1}^n C(t_i) - n \cdot \aleph_{max} \end{aligned} \quad (51)$$

La parte izquierda de la Ecuación 51 es el logaritmo de la función de verosimilitud $L(\theta, t_i)$.

Para la distribución exponencial el Conocimiento de los datos muestrales es $C(t_i) = -\lambda \cdot t_i$ y $\aleph_{max} = -\ln(\lambda)$ de la Tabla 2.

$$\ln \prod_{i=1}^n f(t_i)_{max} = \ln(L(\lambda, t_i)) = -\lambda \sum_{i=1}^n t_i + n \cdot \ln(\lambda) \quad (52)$$

El estimador de máxima verosimilitud de λ es el valor de λ que maximiza la función de verosimilitud $L(\lambda, t_i)$ y, a la vez, maximiza su logaritmo $\ln(L(\lambda, t_i))$ (Montgomery, 2003).

$$\frac{\partial \ln(L(\lambda, t_i))}{\partial \lambda} = 0 \quad (53)$$

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n t_i + \frac{n}{\lambda} &= 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n}} \\ \lambda &= \frac{1}{\bar{t}} \end{aligned} \quad (54)$$

Lo que confirma que en una muestra aleatoria exponencial la mejor estimación del parámetro λ es el inverso de la media muestral.

4.4. Modelación de fenómenos naturales, caso tormentas de lluvia en Quito

En general, el parámetro λ para la distribución exponencial se considera constante, sin embargo, para la modelación de la conducta temporal de tormentas intensas, este parámetro se convierte en una variable relacionada con la duración del evento, expresado por la Ecuación 55.

$$\alpha = \lambda \cdot DT \quad (55)$$

Los fenómenos que pueden ser modelados con la Ecuación 55, tienen episodios de altas intensidades de disipación en sus

etapas tempranas lo que influencia su tiempo de vida. Mientras más intenso un fenómeno su tiempo de vida es más corto.

El modelo MIT-Q se construyó para simular la representación espacial y temporal de las lluvias sobre un área de 1600 km² sumando la lámina de precipitación de celdas estocásticas individuales. La precipitación máxima P (mm) y su tiempo de vida DT (h) de cada evento, es un par probabilístico de borde del Funcional Exponencial Truncado Cuadrático.

De una simulación estocástica de 200 años se extrajo las máximas intensidades de lluvia(mm/h) para duraciones entre 10 minutos a 6 horas y se comparó, con un criterio de error, con las curvas Intensidad-Duración-Frecuencia (IDF) oficiales de la Empresa Pública Metropolitana de Agua Potable y Saneamiento de Quito (EPMAPS), proceso que permitió calibrar los parámetros del modelo. Los patrones temporales de eventos individuales presentaron una conducta exponencial truncada en DT con parámetro $\alpha = \lambda \cdot DT$, donde el parámetro α se ha calibrado en 9,8 con datos de la centenaria estación meteorológica M-054 Quito-Observatorio (9 976 222N 777 988E). Seguido, se comparó las intensidades simuladas en otras estaciones: M-003 Izobamba (9 959 896N 772 547E), M-024 Ñaquito (9 980 311N 779 641E) y M-002 Tola (9 974 245N 792 888E), P10 DAC-Aeropuerto (9983925N 779725E) para validar el MIT-Q. El ajuste del modelo en la etapa de calibración se indica en la Figura 7a, en tanto, la validación con las cuatro estaciones meteorológicas adicionales se indica en las Figuras 7b, 7c, 7d y 7e. El reporte gráfico del modelo MIT-Q de las intensidades de lluvias centenarias de 1 hora de duración se indica en la Figura 8.

Discusión:

Cuando no se pueden ignorar las fuerzas gravitatorias en la conformación de las grandes nubes cargadas de gotas de precipitación que las obliga a caer, la gravedad se convierte en un factor clave en el arreglo temporal de una tormenta. Y se convierte en creadora de información. El funcional extremo de tormenta en Quito es:

$$P(t)_{max} = \left(\frac{1 - e^{-g \cdot \frac{t}{DT}}}{1 - e^{-g}} \right)^2 \quad (56)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad.

La precipitación en el tiempo se simula con un funcional de precipitación:

$$Pre(t) = PRE \cdot \left(\frac{1 - e^{-g \cdot \frac{t}{DT}}}{1 - e^{-g}} \right)^2 \quad (57)$$

Donde, la precipitación máxima PRE (mm) se consigue con una distribución exponencial de Weibull y la Duración DT (horas) con una distribución exponencial truncada.

Los resultados de la modelación se comparan con las curvas IDF oficiales de la EPMAPS (Empresa Metropolitana de Alcantarillado y Agua Potable [EMAAP-Q], 2009) de la estación Quito Observatorio y Tola. En tanto las estaciones meteorológicas Izobamba, Aeropuerto e Ñaquito se comparan con el estudio de Palacios et al (2015).

6. CONCLUSIONES

El principio fundamental *Mínima Acción* del campo determinístico es denominado *Certeza Máxima* \aleph_{max} en el campo probabilístico. Surge del equilibrio en la información que entra y sale de un sistema probabilístico. \aleph_{max} es un invariante que para el conocimiento y la información recibida se conserva en todo tiempo, incluso al instante $t = 0$. Si bien se inició aplicando \aleph_{max} a la distribución exponencial, la extensión a otras FDAs, continuas o discretas, acotadas o no acotadas, es natural. Varias FDAs de la estadística inferencial se pueden emparejar a un invariante particular \aleph_{max} .

El Conocimiento $C(t)$ asociado a una distribución probabilística, se junta con otra cantidad conocida como Información $I(t)$ en permanente equilibrio. El equilibrio se consigue con una función de densidad de probabilidad $f(t)$ que puede ser máxima o mínima. La máxima $P(t)_{max}$, asociada a la \aleph_{max} , es el recorrido más más probable entre los posibles. Es factible adicionar al Conocimiento $C(t)$ una función de Experiencia como $E(t) = \text{sen}(t)$ o una de Creencia $Cr(t) = \text{cos}(t)$ y obtener FDAs multimodales.

Con el PCM se evidencia el Conocimiento subyacente de varias FDPs truncadas como la Exponencial, Exponencial Cuadrática o la denominada *Quito Truncada*. La extensión a FDPs no truncadas se consigue ampliando el dominio de integración a infinito. La Tabla 2 ayuda a clasificar el origen subyacente de las FDPs.

En el campo determinístico, maximizar un funcional específico permite obtener una ley física que rige la conducta real de los fenómenos en la naturaleza. En el campo probabilístico en cambio, obtiene el arreglo temporal más probable entre todos los posibles.

La invariabilidad es una característica que distingue a la \aleph_{max} de la Máxima Entropía. Para obtener el PCM no es necesario el preconcepto Entropía, la \aleph_{max} surge a un nivel subyacente.

Un patrón aleatorio o arreglo está compuesto por eventos. El orden azaroso de los eventos es irrepitable, físicamente se interpreta como adaptable a fenómenos disipativos de una cantidad física. El patrón temporal exponencial truncada cuadrático puede asociarse con fenómenos naturales muy intensos desencadenados por una inestabilidad que buscan recuperar el equilibrio. Si λ es alto la conducta aleatoria tenderá a ser determinista y por tanto susceptible de observar patrones en el tiempo, si $\lambda = 0$ la conducta será totalmente aleatoria, los eventos equiprobables y no habrá forma de organizar u ordenar algo en el tiempo.

En fenómenos disipativos como las tormentas, la naturaleza prefiere patrones temporales precoces representados por la distribución exponencial truncada cuadrática con parámetro α igual a la gravedad (9.8m/s^2) para Quito-Ecuador.

La aplicación del PCM a muestras estadísticas obtiene y justifica la base del conocido método de Máxima Verosimilitud para la estimación de parámetros de una FDP.

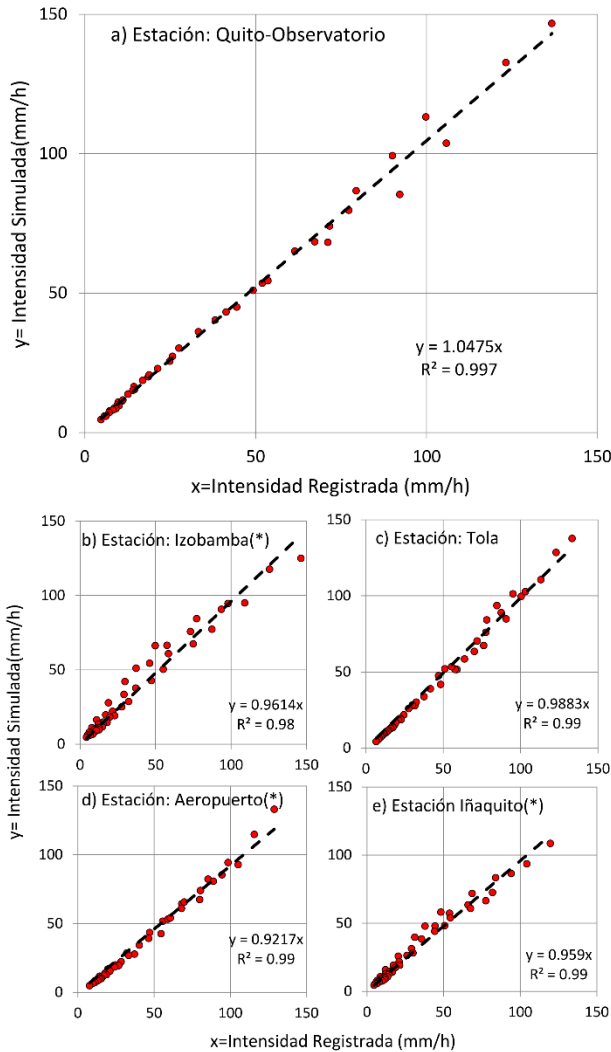


Figura 7. a) Calibración 200 años de simulación comparado con datos de estación Quito-observatorio b) Validación con datos de curvas IDF de estación meteorológica Izobamba c) Estación Tola d) Estación Aeropuerto e) Estación Iñaquito

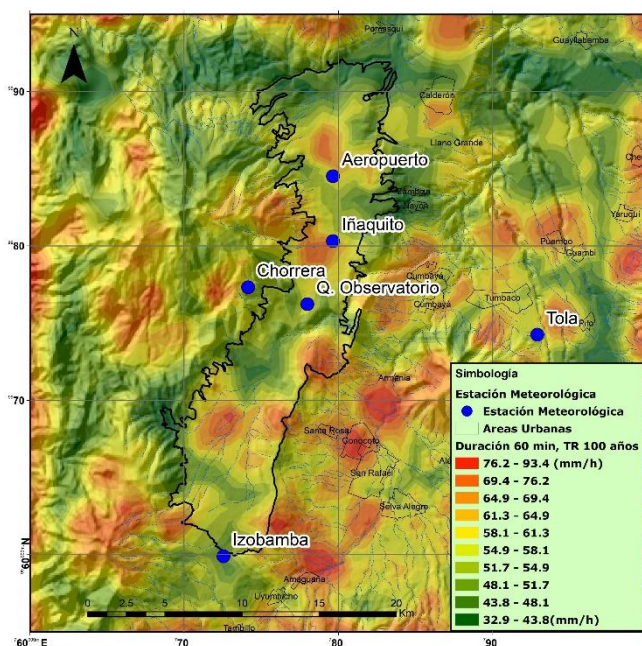


Figura 8. Intensidad de lluvia en Quito, Tr=100 años, Duración 1 hora

REFERENCIAS

- Abramson, N. (1981). *Teoría de la información y codificación* (J. Menoyo, Trad.; 5.ª ed.). Paraninfo. (Original work published 1963).
<https://www.cartagena99.com/recursos/alumnos/apunt es/Teoria de la Informacion y codificacion- Norman Abramson ebook-spanish .pdf>
- Anzaldo, A., Delgado, J., y Monroy, F. (Eds.). (2007). *El legado matemático de Leonhard Euler a trescientos años de su nacimiento*. Innovación Editorial Lagares de México.
<https://www.researchgate.net/publication/336015401-El Legado Matematico de Leonhard Euler>
- Bande, M., Galeano P., González J., y Pateiro B. (2008). *Estadística Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas*. Departamento de Estadística e Investigación Operativa Universidad de Santiago de Compostela.
<http://eio.usc.es/pub/julio/papers/pubdocenteteoriaesta distica.pdf>
- Beltrán, F. (2017). *Lo que esconden las tormentas: Modelación espacio temporal de lluvias en el Ecuador* (1ª. Ed.). Autoedición. <https://www.amazon.com/-/es/Franklin-Aparicio-Beltran/dp/9942284133>
- Beltrán, F. (2019, del 22 al 23 de noviembre). Lo que esconden las tormentas: Modelo calibrado de lluvias intensas en el Distrito Metropolitano de Quito y su proyección al Ecuador [conferencia]. *III Congreso Iberoamericano de Ingeniería Civil, Quito, Ecuador*.
<https://www.researchgate.net/publication/340818551>
- Beltrán, F. (2021, 17 de septiembre). Modelo de información de tormentas en Quito (MIT-Q) [conferencia]. *Congreso Anual de Meteorología y Calidad del Aire CAMCA-2021*, Quito, Ecuador.
<https://www.usfq.edu.ec/sites/default/files/2021-08/libro-abstracts-camca-2021.pdf>
- Berdichevsky, V. (2009). *Variational Principles of Continuum Mechanics*. Springer.
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-88467-5>
- Cosentino, P., Ficarra, V., y Luzio, D. (1977). Truncated exponential frequency - magnitude relationship in earthquake statistics. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 67(6), 1615-1623.
<https://www.researchgate.net/publication/279463293>
- EMAAP-Q, (2009). *Normas de Diseño de Sistemas de Alcantarillado para la EPMAAP-Q*, EPMAPS.
https://www.aguaquito.gob.ec/Alojamientos/PROYECTO%20LA%20MERCED/ANEXO%20%20NORMAS_ALCANTARILLADO_EMAAP.pdf
- Feynman, R., Leighton R., y Sands, M. (2010). The Principle of Least Action. En M. Gottlieb y R Pfeiffer (Eds.), *Lectures on Physics The New Millennium Edition (Volume II)* (pp. 19-1,19-14). Basic Books.
https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_19.html
- Jaynes, E. (1957). Information Theory and Statistical Mechanics. *American Physical Society*, 106(4), 620-630. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.106.620>
- Krasnov, M., Macarenko, G., y Kiseliiov, A. (1992). *Cálculo Variacional* (C. Vega, Trad.). MIR. (Original work published 1974).
- Kreyszig, E. (1994). On the Calculus of Variations and Its Major Influences on the Mathematics of the First Half of Our Century: Part I (A. Shenitzer, Ed.). *The American Mathematical Monthly*, 101(7), 674-678.
<https://www.math.unm.edu/~vageli/courses/Ma579/cvar1.pdf>
- Landau, L., y Lifshitz E. (1994). *Mecánica* (Volumen 1). Editorial REVERTÉ.
https://www.academia.edu/43581613/MECANICA_LA_NDAU_y_LIFSHITZ
- Lévy-Leblond, J. (2002). *Conceptos contrarios o el oficio de científico* (J. Chabás, Trad.). Tusquets Editores.
- Milton, J., y Arnold, J. (2005). *Probabilidad y Estadística con Aplicaciones para Ingeniería y Ciencias Computacionales*. McGrawHill.
- Montgomery, D., y Runger G. (2003). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*. (2ª. Ed.). Editorial Limusa.
- Palacios, W., Zambrano M. y Escobar D. (2015). *Análisis temporal de las lluvias extremas en el DMQ y cálculo de las curvas de Intensidad-Duración-Frecuencia*. EPMAPS.
https://www.aguaquito.gob.ec/Alojamientos/PALUGUI_LLO%20BELLAVISTA%20TRAMO%20/An%C3%A1lisis%20temporal%20de%20las%20lluvias%20extremas%20en%20el%20DMQ.pdf
- Rose, S. (2010). *A First Course in Probability* (8ª. Ed.). Pearson Prentice Hall.
- Shannon, C. (1948). *A Mathematical Theory of Communication*. The Bell System Technical Journal, 27(3), https://ia803209.us.archive.org/27/items/bstj27-3-379/bstj27-3-379_text.pdf
- Thingbaijam, K., y Mai, M. (2016). Evidence for Truncated Exponential Probability Distribution of Earthquake Slip. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 106(4), 1808-1809. <https://doi.org/10.1785/0120150291>
- Vijay, P. (2014). *Entropy Theory in Hydraulic Engineering An Introduction*. American Society of Civil Engineers.
<https://ascelibrary.org/doi/book/10.1061/9780784412725>

BIOGRAFÍA



Franklin Aparicio Beltrán Vega, Ingeniero Hidráulico con Maestría en Recursos Hídricos de la Escuela Politécnica Nacional de Quito-Ecuador (2004). Investigador calificado en la Secretaría de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación (SENESCYT). Ha participado en el diseño y construcción de proyectos hidroeléctricos en Ecuador. Ha dictado cursos de Estructuras Hidráulicas a nivel de Posgrado. Conferencista en talleres y congresos en Universidades y Colegios de Profesionales. Desde 2007 dirige IDD. Consultores, empresa especializada en investigación de recursos hídricos y geociencias.