

Cuasi-implicación estadística y determinación automática de clases de equivalencia en imágenes de resonancia magnética de cerebro

Pazmiño R. *; Pérez M. G. **; Andaluz V. H. **

*Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador
e-mail: rpazmino@esPOCH.edu.ec

** Universidad Técnica de Ambato, Ambato, Ecuador
e-mail: maria.espanya@gmail.com; victor_hugo0301@hotmail.com

Resumen: La técnica de cuasi-implicación estadística es muy útil para determinar relaciones de causa y efecto (con un número pequeño de excepciones). La aplicación del análisis jerárquico de similitudes, busca constituir particiones cada vez más finas, en el conjunto de variables, construidas de forma ascendente en árbol, mediante un criterio de similitud entre las mismas. Su objetivo es descubrir y estructurar en forma de reglas, un conjunto de datos a partir de la modelización estadística de la cuasi-implicación. En este trabajo se presenta una aplicación de esta técnica para encontrar grupos de equivalencia existente entre un conjunto completo de imágenes (groundTruth) de resonancia magnética de cerebro (T1-weighted). Los experimentos se han realizado con la serie de lonchas sin cráneo, segmentadas y binarizadas previamente. Los resultados muestran una robusta clasificación de las mismas agrupándolas según un mismo índice de implicación entre dos lonchas en forma cuasi-bicondicional. En cada grupo de similitud el método permite seleccionar a uno de los cortes como representante del grupo generando una lista de patrones los cuales resumen las características encontradas próximas al patrón. Para representar el grado de equivalencia se ha utilizado una probabilidad.

Palabras clave: Cuasi-Implicación Estadística, Análisis Estadístico Implicativo, Equivalencia de Imágenes, Resonancia magnética del Cerebro, representación de imágenes.

Abstract: The quasi-implication statistical technique is very useful for determining cause and effect (with a few exceptions). The application of hierarchical analysis of similarities, seeks to build increasingly fine partitions in the set of variables, built from the bottom up in the tree, using a criterion of similarity between them. Their purpose is to discover and structure, in the form of rules, a set of data from statistical modeling of quasi-implication. An application of this technique is presented in this work to find groups of equivalence between a full set of Brain MRI (T1-weighted) images (ground Truth). Experiments have been performed with a number of slices without skull previously segmented and binarized. The results show a robust classification of the same grouping them with the same rate of engagement between two quasi-biconditional shaped slices. This method allows in each similarity group select one of the images as a representative of the group, generating a list of standards which outline features proximal to the pattern. To represent the degree of equivalence a probability has been used.

Keywords: Quasi-Implicative Statistics, Statistical Implicative Analysis, Image equivalence, MRI of the Brain, representational images.

1. INTRODUCTION

En didáctica de la matemática, el método de análisis estadístico implicativo (ASI) se desarrolla en correspondencia con los problemas encontrados y las cuestiones planteadas. Su objetivo principal contempla la estructuración de datos, interrelacionando sujetos y variables, la extracción de reglas inductivas entre las variables y, a partir de la contingencia de estas reglas, la explicación y en consecuencia una determinada previsión en distintos ámbitos:

psicología, sociología, biología, etc. Es por ello que se crearon los conceptos de intensidad de implicación, cohesión de clases, implicación-inclusión, significación de niveles jerárquicos, contribución de variables suplementarias, etc. De la misma forma, al tratamiento de variables binarias (por ejemplo, descriptores, imágenes binarias), se añaden progresivamente los de variables modales, frecuenciales y, recientemente, de variables-intervalo y variables difusas P. Orús et al. [1].

El propósito de este trabajo es determinar grupos de equivalencia (similitud) entre imágenes de lonchas de un

goldestándar de resonancia magnética de Cerebro (T1-weighted), mediante el uso de los índices de implicación y el concepto de reducción basado en la cohesión propuestos por R. Gras y R. Couturier et al. [2], mediante la herramienta CHIC [2]. Además permitirá determinar si se puede aplicar el índice de implicación en la solución de problemas de clasificación y la similitud respecto a las características representadas mediante patrón de clase de un conjunto grande de datos generados por imágenes binarias de resonancia magnética de cerebro. En este estudio en particular se analiza los diferentes modos de representación para las distintas formas que tienen los cortes de las imágenes del cerebro. Más concretamente, el objetivo de este estudio es explorar y comparar la técnica en el contexto de las imágenes respecto a aplicaciones de otros campos como la didáctica matemática (DM).

La clasificación jerárquica, construida a partir del índice de similaridad entre atributos o variables de Lerman (1981) [3], muestra relaciones simétricas (de proximidad o distancia) entre dichas variables o entre sujetos que las verifican; mientras que la clasificación implicativa, se basa en un índice estadístico que expresa la noción de cuasi-implicación entre variables del trabajo propuesto por Lerman et al., (1981) [4] y que mide esa intensidad de implicación, plasmándolo en un grafo implicativo (disimétrico), imagen de la relación de preorden parcial que se establece entre las variables o sujetos.

En didáctica es muy utilizado para estudiar e interpretar en términos de tipología y de proximidad o lejanía decreciente de los núcleos de variables, constituidos significativamente a ciertos niveles del árbol, oponiéndose a otros núcleos en esos niveles.

Generalmente los diferentes desarrollos se centran en la propuesta de un índice de implicación parcial para datos binarios Lerman et al. (2004) [5], Lallich et al. (2005) [6]. Además, esta noción se ha pretendido extenderla a la agrupación de una serie de lonchas de imágenes binarias de resonancia magnética de cerebro T1-weighted (morfológica o estructural) mediante la extracción y la representación según un grafo de reglas o según una jerarquía de meta-reglas; estructuras que apuntan a la significación de un todo no reducible a la suma de sus partes. Asimismo, el concepto de índice de implicación tradicional se ha extendido en esta investigación a similitud de dichas lonchas.

En la mayoría de trabajos propuestos en la literatura se utiliza el método de reducción R. Couturier et al. [2], mediante la herramienta CHIC [2] para disminuir el número de variables, pero en éste trabajo se ha hecho una adaptación para agrupar imágenes binarias y determinar un patrón.

En algunos trabajos, tal como el propuesto por L. Zamora et al. [7] muestra las posibles relaciones de similaridad, implicación y cohesión entre el rendimiento académico de estudiantes provenientes de cursos preuniversitarios para ingresar a las carreras de Matemática y Ciencia de la

Computación y su rendimiento en las asignaturas de matemáticas y de programación que reciben en el primer año de dichas carreras.

En los trabajos existentes en la literatura no se utilizan imágenes como variables por lo que su adecuación es uno de los aportes de éste trabajo.

2. ANALISIS IMPLICATIVO Y CUASI-IMPLICATIVO

2.1 Revisión de la literatura

El análisis estadístico implicativo (ASI) es un método de análisis no simétrico que permite la extracción y la estructuración del conocimiento en forma de normas y reglas generalizadas a partir de un conjunto de datos que interrelaciona una población de sujetos (u objetos) con un conjunto de variables. Su origen es la modelización estadística de la *cuasi-implicación*: cuando la variable o la conjunción de variables “A” es observada en la población, entonces generalmente la variable “B” también es observada. Dichas variables pueden ser de distintos tipos: binario, modal, numérico, intervalo, difuso, etc.

A diferencia de los métodos de análisis simétricos basados, por ejemplo, en una distancia o en una correlación Lerman et al., (1981) [4], los conjuntos de reglas obtenidas pueden conducir a hipótesis de causalidad. Estos conjuntos se estructuran según diferentes características comunes complementarias (grafo implicativo, jerarquía orientada). La determinación cuantitativa de los sujetos o descriptores responsables de estas estructuras se determina por su contribución o su tipicidad. Para visualizar e interpretar los resultados, se suele utilizar la herramienta informática estadística Clasificación Jerárquica, Implicativa y Cohesiva (CHIC, en inglés *Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive*), adaptada por (R. Gras, 1992) [8] a partir de los índices de proximidad o distancia Lerman (1981) [9]. CHIC v3.7, es una herramienta usada en muchos campos de la ciencia, actualmente es desarrollada por (Couturier et al., 2005 [10], y Couturier et al., 2006 [2]) quienes la actualizan según vayan surgiendo nuevas necesidades tanto de conceptos como de algoritmos. A través de los gráficos (diagramas de árbol) que proporciona este programa se pueden obtener clases de equivalencia entre las variables que se tratan. Esta partición (representada gráficamente) del conjunto de los datos, permite obtener conclusiones acerca de la población tratada, tanto si se desea a nivel de clasificación por similaridad o por la jerarquía según el grado de implicación entre dichas clases. Asimismo, el grafo implicativo que se obtiene, permite visualizar las relaciones de “cuasi-implicación” o implicación estadística que existe entre las variables (los criterios) según los sujetos que los cumplan y/o entre los sujetos o los objetos a partir de los criterios que los definen. Así en el libro de P. Orús et al. (2009) [1], R. Gras et al., (2007) [11], y R. Gras et al., (2009) [12], se refleja claramente el objetivo común de difundir el ASI a un mayor número de investigadores y potenciales

usuarios en diversos ámbitos, tanto nacional como internacionalmente.

Por otro lado, el concepto de cuasi-implicación, eje central del ASI, relaja al de implicación, de modo que se trata de una regla que admite contraejemplos: "cuando un individuo presenta el rasgo A, entonces, generalmente, también presenta el rasgo B". La fuerza de la cuasi-implicación se mide al comparar el número de contraejemplos presentes, con los que aparecerían bajo una ausencia de relación estadística. Esta filosofía conduce a varias modelizaciones posibles, entre las que se puede describir una: si de n individuos muestreados, el rasgo A se presenta en n_a de ellos, y el rasgo B en n_b de ellos, entonces se podría asumir que: (1) la observación de un individuo que presenta el rasgo A ocurre con probabilidad n_a/n , y con independencia entre individuos, (2) la observación de un individuo que *no presenta* el rasgo B ocurre con probabilidad $(n-n_b)/n$, y con independencia entre individuos, y (3) la ausencia de relación estadística entre A y B conlleva a que la observación de un individuo contraejemplo de $a \Rightarrow b$ (es decir que presenta el rasgo A y no presenta el rasgo B) ocurre con probabilidad $n_a(n-n_b)/n^2$ [13].

Así pues, el número aleatorio de contraejemplos a la regla $a \Rightarrow b$, que podemos denotar por N_{ab} , al muestrear n individuos bajo independencia, sigue el modelo binomial de parámetros n y $n_a(n-n_b)/n^2$. [13]

Por la importancia del tema, este campo se ha ido desarrollando durante los últimos 30 años, con contribuciones teóricas que han ampliado el ámbito de aplicación desde las variables binarias (de presencia/ausencia), como las tratadas en este trabajo, a variables de todo tipo (nominal, ordinal, escala, incluso difusas), pero en particular, el desarrollo del método jerárquico de agrupación de variables, al estilo de los árboles jerárquicos de clasificación del Análisis *Cluster*, que, a diferencia de éste, agrupa variables de forma no simétrica, pues se basa en la cuasi-implicación entre ellas. Se le ha llamado *Análisis de Cohesión*, y es muy útil como herramienta de Análisis Exploratorio, pues estructura las variables analizadas en "reglas de reglas" (como cuasi-corolarios a cuasi-teoremas) [13]. En el Apéndice A, se ilustra este concepto.

2.2 Formalización de las expresiones y las notaciones del método propuesto

En esta sección se describe la notación que se ha utilizado en éste trabajo para realizar los cálculos respectivos:

Sea $A \Rightarrow B$ una regla de asociación entre dos conjuntos de elementos A y B subconjuntos de un conjunto de datos I. Este valor mide la calidad de la regla en función del número de contraejemplos que se ven en la muestra.

Donde I_A representa los individuos descritos por la propiedad A, I_B representa los individuos descritos por la propiedad B, $\overline{I_B}$ representa los individuos no descritos por la

propiedad B y $|I_B|$ representa la cardinalidad del conjunto I_B .

Por tanto, $I_{A \wedge B}$ representará a los individuos descritos por las propiedades A y B.

Mientras que $I_{A \wedge \overline{B}}$ representa los individuos descritos por las propiedades A y por no B, los cuales representan los contraejemplos de la regla $A \Rightarrow B$.

Por otro lado, la intensidad de la implicación de una regla está definida como el número de veces que la regla no se cumple por un pequeño número de contraejemplos. La intensidad de la implicación que aquí se denominará **ImpInt**, formalmente definida por (1):

$$\text{ImpInt}(A \Rightarrow B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_q^\alpha e^{-t^2} dt \quad (1)$$

Donde el límite inferior de integración q está dado por (2):

$$q = \frac{|I_{A \wedge \overline{B}}| - n \frac{|I_A| \cdot |I_B|}{n^2}}{\sqrt{n \frac{|I_A| \cdot |I_B|}{n^2} (1 - \frac{|I_A| \cdot |I_B|}{n^2})}} \quad (2)$$

Este índice cumple funciones similares a las del ya conocido coeficiente de correlación.

Otro término que se empleará es el denominado Validez y que está dada por (3):

$$\text{Validez}(A \Rightarrow B) = \begin{cases} 1 - E(f_1)^2, & \text{si } f_1 \in [0; 0.5] \\ 0, & \text{si } f_1 \in]0.5; 1] \end{cases} \quad (3)$$

Donde, f_1 es igual a (4):

$$\frac{|I_{A \wedge \overline{B}}|}{I_A} \quad (4)$$

Y $E(f)$, representa a la función de entropía. Esta se incorpora para obtener resultados más acordes en muestras grandes.

La **Validez Global** de la regla está definida en (5):

$$\text{GloVal}(A \Rightarrow B) = [\text{Validez}(A \Rightarrow B) \cdot \text{Validez}(\neg B \Rightarrow \neg A)]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

La **Utilidad** de una regla de asociación $A \Rightarrow B$ está definida como (6):

$$\text{Utilidad}(A \Rightarrow B) = \begin{cases} 1, & \text{si } |I_A \cap I_B| \geq \text{minsup} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6)$$

Minsup, representa el mínimo número de individuos que necesita verificar la regla.

Para representar la relevancia de una regla se suele emplear el término **Relevancia** y está dada por (7):

$$\text{Relevancia}(A \Rightarrow B) = \text{Utilidad}(A \Rightarrow B) \cdot \sqrt{\text{ImpInt}(A \Rightarrow B) \cdot \text{GloVal}(A \Rightarrow B)} \quad (7)$$

Lógicamente dos variables A y B son equivalentes si y solo si $A \Rightarrow B$ y $B \Rightarrow A$, es decir la **cuasi-equivalencia** es medida por el coeficiente $\text{Quasi}(A, B)$ definido por (8):

$$\text{Quasi}(A, B) = \sqrt{\text{Relevancia}(A \Rightarrow B) \cdot \text{Relevancia}(B \Rightarrow A)} \quad (8)$$

Es oportuno aclarar que no solo se puede trabajar con cuasi-equivalencias entre dos variables sino también con cuasi-equivalencias entre clases.

Así, una clase de cuasi-equivalencia de n variables A_1, A_2, \dots, A_n es medido por el coeficiente de **cuasi-equivalencia de la clase** definida en (9):

$$\text{Quasiequivalencia de la clase}(A) = \min\{\text{Quasi}(A_i, A_j), \forall i=1,2,\dots,n-1; \forall j=1,2,\dots,n\} \quad (9)$$

3. METODOLOGIA

Luego del proceso de adquisición es necesario adecuar las imágenes de las lonchas de tal forma que presenten características comunes.

3.1. Paso 1

Los requisitos que deben cumplir son: estar en blanco y negro, ser del mismo tamaño en ancho y altura, estar en formato jpg. El método permite trabajar con cualquier cantidad de imágenes y de cualquier tamaño. En los experimentos se ha utilizado 144 cortes de tamaño 181x217 píxeles cada uno.

A continuación se procede a realizar los pasos descritos anteriormente para calcular la cuasi-equivalencia de clases ($\text{Quasiequivalencia de la clase}$) entre las 144 lonchas de la imagen.

3.2. Paso 2

Extraer la información de los píxeles de la imagen y representarlos por variables dicotómicas. En este paso se obtuvo 144 variables con 39277 datos. En total 5655888 elementos que conforman la base de datos estadística. Para automatizar éste paso se desarrolló una nueva función que se ha implementado en el lenguaje estadístico R.

3.3. Paso 3

El Adecuar la base de datos estadística para poderla ingresar en el programa CHIC, para ello se utilizó libre *Office Calc*.

Seguidamente se calculó la **Quasi-equivalencia de la clase** el representante de cada una de ellas. Para calcular las clases de similitud (equivalencia) entre clases se obtuvieron los parámetros definidos en el apartado 2.2

3.4. Paso 4

Graficar el árbol de Cohesión para estructurar y jerarquizar los datos, realizar el proceso de reducción, seleccionar los patrones y visualizar los resultados, para ello se utilizó el software de prueba CHIC v6.0 [11].

La descripción, detalles y resultados de cada uno de estos experimentos se describen en el apartado resultados experimentales.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Todos los experimentos fueron realizados con volúmenes simulados obtenidos del *BrainWeb* [14]. Este repositorio de imágenes es propiedad del *MacConnell Brain Imaging Center del Instituto Neurológico* de Montreal, Canadá.

Las aplicaciones se realizaron en un computador Intel Core 2 CPU de velocidad 3 GHz y de memoria RAM 4 GB y sistema operativo Microsoft Windows XP Professional.

El tiempo de respuesta ha sido considerablemente pequeño considerando el gran volumen de datos a procesar, el cual se ha calculado utilizando la función *proc.time()* mediante el lenguaje estadístico R, obteniéndose los siguientes resultados: *usersystemelapsed* 33.15 7.16 53.63

Como se puede observar este proceso es de aproximadamente alrededor de medio minuto para los 5655888 elementos.

La similitud encontrada entre algunas clases se muestran en la Figura 1, Figura 2 y Figura 3, en donde se puede observar que cada nodo del grafo agrupa lonchas con características similares entre si. El nombre que aparece a la izquierda de cada corte identifica la modalidad de la imagen y el número de orden en la serie del conjunto de lonchas (RMC133,...). Como se puede observar en cada una de las figuras, cada uno de estos grupos presenta características muy próximas a su patrón (clase 1, clase 2 y clase 3), en la que podemos afirmar que se ha obtenido una adecuada clasificación de similaridad entre el grupo de lonchas de la imagen del cerebro.

Finalmente, el árbol cohesivo generado por la herramienta se muestra en el Apéndice A. En el primer gráfico se muestra las relaciones de cohesión entre todos los datos de las tres clases estudiadas. Los niveles de cohesión más altos se muestran a continuación:

Nivel 1: RMC034 y RMC035 con cohesión 1

Nivel 2: RMC029 y RMC030 con cohesión 1

Nivel 3: Clase (RMC034 y RMC035) y RMC036 con cohesión 1

En las siguientes figuras se muestran las clases de equivalencia y sus respectivos representantes.

Clase 1:RMC133			
RMC128		RMC133	
RMC137		RMC132	
RMC136		RMC131	
RMC135		RMC130	
RMC134		RMC129	

Figura1. Grupo de lonchas del representante de la clase RMC133

Clase 3: RMC033			
RMC030		RMC029	
RMC032		RMC031	
RMC034		RMC033	
RMC036		RMC035	
RMC038		RMC037	

Figura2. Grupo de lonchas del representante de la clase RMC033

Clase 2:RMC078			
RMC088		RMC087	
RMC092		RMC086	
RMC091		RMC085	
RMC090		RMC079	
RMC084		RMC078	
RMC083		RMC077	
RMC082		RMC076	
RMC081		RMC075	
RMC080		RMC069	
RMC074		RMC068	
RMC073		RMC067	
RMC072		RMC066	
RMC071		RMC065	
RMC070		RMC064	
RMC063		RMC062	
RMC061		RMC060	
RMC089			

Figura3. Grupo de lonchas del representante de la clase RMC078

5. EVALUACIÓN DEL METODO

Para determinar la calidad de los resultados se ha utilizado la técnica visual proporcionada por expertos en tratamiento de imágenes médicas de RM, para cada una de las aproximaciones.

En las clases representantes para las lonchas RMC133, RMC078 y RMC033 se puede observar que las mismas indican que los componentes de este grupo son las lonchas más próximas entre sí y son de similares características, tal como se puede observar en las Figura 1, 2 y 3.

6. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Se presentan unos resultados preliminares de la técnica propuesta para la clasificación de un grupo de lonchas de una imagen de RM de cerebro en blanco y negro (binaria).

Puesto que el análisis de similaridad busca relaciones de equivalencia entre las variables que miden la presencia o ausencia de ciertos rasgos que se podría derivar diciendo que lo mismo ocurre cuando los individuos presentan simultáneamente los rasgos A y B.

Así, se puede observar que el método de reducción permite determinar en forma robusta grupos de similitud entre una serie de cortes.

El proceso se visualiza en forma de árbol o grafo que en algunas herramientas suele denominarse *dendrograma*.

Cada individuo puede contribuir a la formación de la clase si se cumple que coincide en la mayoría de variables de la clase, de tal manera que contribuya en mayor medida a la formación de la clase.

En el grafo cohesitivo se muestra la cohesión entre variables que miden la presencia o ausencia de ciertos rasgos. Relaciones que pueden interpretarse como implicativas, con la ventaja que se estructuran jerárquicamente como ocurre con los teoremas o colorarios.

En el futuro, se pretende extender el método a imágenes en color y particularmente para encontrar la similitud o correlación entre las regiones de interés de las imágenes segmentadas.

Podría ser una técnica ventajosa y rápida para binarizar, cuantificar y clasificar imágenes según el patrón encontrado.

Evaluar la similitud entre clases de una imagen segmentada es de suma importancia en el procesamiento y análisis digital de imágenes.

Entiéndase por procesamiento digital de imágenes la manipulación de una imagen a través de un computador, de modo que la entrada y la salida del proceso sean imágenes. Para comparar, en la disciplina de reconocimiento de patrones, la entrada del proceso es una imagen y la salida consiste en una clasificación o una descripción de la misma.

Estudiar, analizar y describir imágenes médicas a partir del procesamiento digital, constituye en la actualidad, una herramienta de trabajo, cuya precisión facilita al especialista la obtención de inferencias de valor diagnóstico y pronóstico de enfermedades, con el lógico beneficio para el paciente. Son muchas las técnicas de procesamiento y análisis digital empleadas en el campo de la medicina. Estas van desde el mejoramiento de contraste, la detección de contornos, hasta los más complejos sistemas de reconocimiento de patrones y reconstrucciones tridimensionales.

No obstante, tendremos que estudiar más detalladamente las potencialidades de esta técnica para aplicarla al campo del procesamiento y análisis de imágenes biomédicas.

7. AGRADECIMIENTOS

Los autores del presente trabajo agradecen la colaboración de la Facultad de Ciencias y el Centro de Investigación y Asesoría en Estadística Informática y Matemática Aplicada de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, a la DIDEy a la Facultad de Sistemas, Electrónica e Industrial de la Universidad Técnica de Ambato.

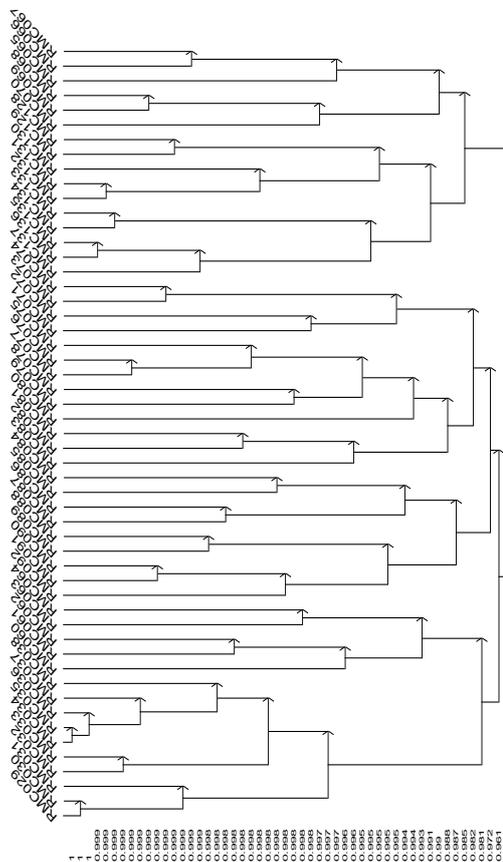
REFERENCIAS

- [1] P. Orús, L. Zamora, y P. Gregori. "Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo." *Primera aproximación en lengua hispana*. Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente de Santiago de Cuba. Castellón, 2009.
- [2] R. Couturier, A. Bodin, R. Gras, *Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive (CHIC v3.7)*. Guide d'utilisation, Ecole Polytechnique, Université, Nantes, 2006.

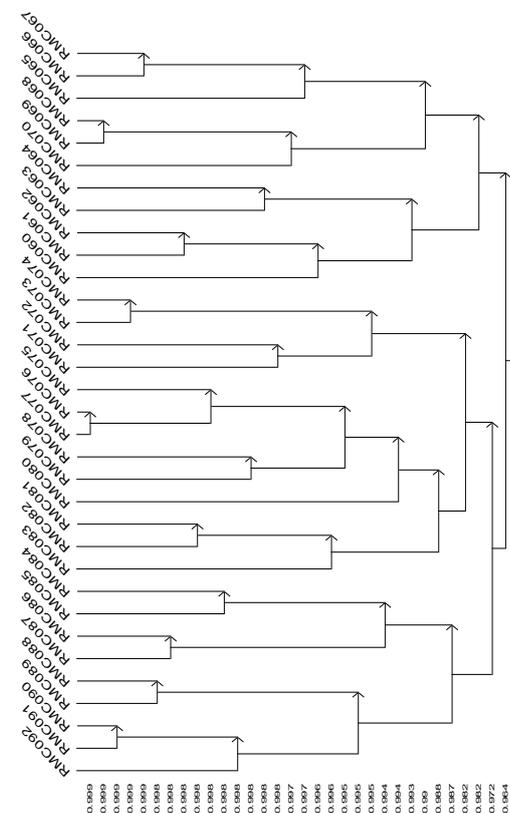
- [3] I.C. Lerman, (1981). *Classification et analyse ordinaire des données*, Dunod, Paris, 1981
- [4] I.C. Lerman, R. Gras, et H. Rostam. *Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires*, I et II, *Mathématiques et Sciences Humaines*, n° 74, pp. 5-35 et n° 75, pp. 5-47, 1981.
- [5] I.C. Lerman, et J. Azé. *Indice probabiliste discriminant (de vraisemblance du lien) d'une règle d'association en cas de "très grosses" données*, Mesures de qualité pour la fouille de données, RNTI-E-1, p. 69-94, 2004.
- [6] S. Lallich, P. Lenca, et B. Vaillant. *Variations autour de l'intensité d'implication*, 2005, Actes ASI 05, Université de Palerme.
- [7] L. Zamora M., P. Orús B., J. Díaz S., El Análisis Estadístico Implicativo, instrumento común de investigación en una experiencia de cooperación multidisciplinar: "Visualizar" una expresión de discontinuidad del rendimiento académico en estudiantes universitarios de Matemática y Computación usando análisis estadístico implicativo. *"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)"*, n° 20 suppl 1, G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy), A.S.I. 5 Proceedings 5-7, 2010.
- [8] R. Gras. L'analyse des données: une méthodologie de traitement de questions de didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12-1, 1992.
- [9] I.C. Lerman. *Classification et analyse ordinaire des données*, Dunod, Paris, 1981.
- [10] R. Couturier, R. Gras, *CHIC: Traitement de données avec l'analyse implicative*, Extraction et Gestion des Connaissances, Vol. II, RNTI, Cépaduès, Paris, pp.679-684, 2005.
- [11] R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet, and F. Spagnolo (Eds.), *Statistical Implicative Analysis: theory and applications* (Springer, 2007) Series: Studies in Computational Intelligence, Vol. 127.
- [12] R. Gras, J.C. Régner, Fabrice Guillet. *Analyse Statistique Implicative; une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*, edit. Cépaduès, 2009
- [13] P. Orús, L. Peydró y P. Gregori. El centro de recursos CRDM-Guy Brousseau y el análisis estadístico implicativo como herramienta en la formación de profesores, Universitat Jaume I de Castellón. [online]. Disponible en: <http://www.jvdiesproyco.es/documentos/ACTAS/2%20Comunicacion%202020.pdf>.
- [14] C. Cocosco, V. Kollokian, R.-S. Kwan, and A. Evans, "Brainweb: Online interface to a 3d MRI simulated brain database," *NeuroImage*, Vol. 5, pp. S425, 1997. [online]. Disponible en: <http://www.bic.mni.mcgill.ca/brainweb/>

Apéndice A

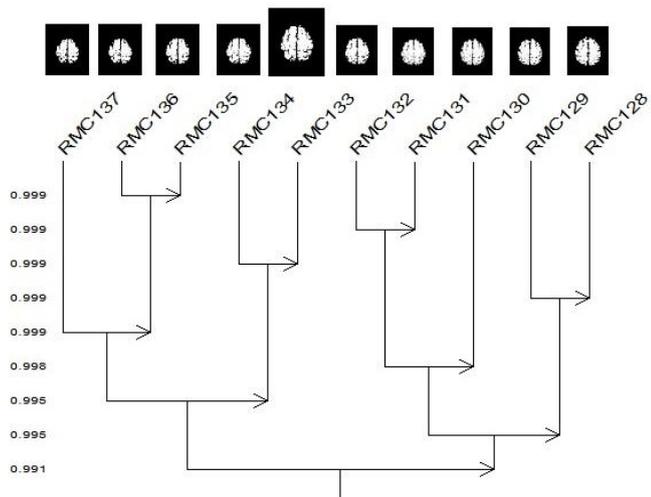
Árbol cohesivo de la serie completa de lonchas de la MRI del cerebro



Árbol cohesivo de la serie de lonchas de la MRI del cerebro de la clase 3:



Árbol cohesivo de la serie de lonchas de la MRI del cerebro de la clase 1:



Árbol cohesivo de la serie de lonchas de la MRI del cerebro de la clase 2:

