Sistemas de ecuaciones diferenciales nolineales indefinidas

Marco Calahorrano y Miguel Yangari

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias

marco.calahorrano@epn.edu.ec,miguel.yangari@epn.edu.ec

Resumen

En el presente trabajo se demuestra la existencia de al menos una solución para sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales con no linealidades indefinidas, de modo más preciso, el sistema contiene al menos una ecuación del tipo Hill.

Palabras claves: soluciones positivas, ecuación de Hill, sistemas de ecuaciones diferenciales, no linealidades indefinidas.

Abstract

In this study we proof the existence of at least one solution for systems of nonlinear differential equations with indefinite nonlinearities; more precisely this system contains at least one Hill-type equation.

Keywords: positive solutions, Hill equation, systems of differential equations, indefinite nonlinearities.

1 Introducción

Una gran variedad de problemas de las ciencias se describen por sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. En este artículo se estudian los sistemas donde al menos una de las ecuaciones es de Hill. Para ser más precisos estudiaremos la existencia de soluciones positivas para sistemas de la forma:

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda(m(t)f(u) + h(t)f(v)) \quad \text{en} \quad]0,1[\\ -v'' &= g(t,u) \quad \text{en} \quad]0,1[\end{aligned}$$

$$u(0) = v(0) = 0,$$

$$u(1) = \varsigma_1 u(\alpha); \quad v(1) = \varsigma_2 v(\alpha),$$

donde $0 < \varsigma_1, \varsigma_2 < 1$ y m y h son funciones con salto en α.

Hemos llegado a este tipo de problemas al intentar estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de la forma:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda m(t) f(u,v) \quad \text{en} \quad \Omega \\ -\Delta v &= g(t,u) \quad \text{en} \quad \Omega, \end{aligned}$$

donde m es una función que cambia signo, f y g son funciones no lineales que pueden ser discontinuas, y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto suficientemente regular.

Sistemas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales han sido estudiados en los últimos años, en este punto cabe destacar los trabajos desarrollados por Jairo Guedes de Figueiredo y que se encuentran sintetizados en el curso dictado en la Escuela sobre ecuaciones diferenciales parciales, ICTP, 2006, [23], donde se analizan los sistemas de tipo gradiente y aquellos del tipo hamiltoniano pero siempre con no linealidades que poseen cierta regularidad.

Problemas no lineales con no linealidades indefinidas han sido estudiados por S. Alama, M. del Pino, G. Tarantello, H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolcetta, L. Nirenberg, D. Papini, F. Zanolin, J.S. W. Wong, M. Calahorrano, M. Girardi, M. Matzeu, P. Caldilori P. Montecchiari, K. Chang y M. Jiang. El caso de valores propios para funciones peso indefinidas han sido analizados por Anane, Chakrone y Moussa, M. Cuesta. Las ecuaciones diferenciales semilineales elípticas con no linealidades discontinuas han sido estudiadas exhaustivamente por A. Ambrosetti, C. Stuart, M. Badiale, M. Struwe, D. Arcoya, M. Calahorrano, etc.

Ecuaciones de Hill con pesos indefinidos han sido investigados en particular por D. Papini, F. Zanolin; para una bibliografía más extensa chequear el artículo de D. Papini y F. Zanolin, [28], [29].

En un artículo previo [13] estudiamos el caso de una sola ecuación del tipo Hill y probamos la existencia de al menos una solución, con técnicas similares a las que utilizan A. Castro, A. Kurepa, I. Ali, R. Shivaji, en sus trabajos relacionados a problemas no lineales del tipo semipositone. Mirar [16], [17], [18], [19], [20]. Introducimos también la función que R. Manásevich y F. Zanolin denominan el time mapping [26]. En el presente trabajo haremos también uso de estas técnicas.

2 Resultados preliminares

En esta sección, por completitud, vamos a describir algunos resultados que aparecen en [13] y que nos serán de utilidad en el presente trabajo.

Se estudia la existencia de soluciones positivas para problemas a valores al borde:

$$-u'' = \lambda m(x)f(u) \quad \text{en} \quad]0,1[$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$

donde $\lambda > 0$, $m \in \mathcal{PC}[0,1]^1$, m cambia signo y f es una función no lineal con condiciones de crecimiento en cero y en el infinito.

Por simplicidad, supondremos que $m :]0,1[\to \mathbb{R}$ es tal que

$$m(x) = \begin{cases} -1, & \alpha < x < 1, \\ 1, & 0 < x < \alpha, \end{cases}$$

con $\alpha \in]0,1[$.

Consideremos las siguientes hipótesis para la función $f \in \mathcal{C}^2$:

(A) f es tal que:

$$f''(s) > 0 \text{ para } s \geq 0,$$
$$f(0) = 0,$$
$$f(s) - sf'(s) < 0 \text{ para } s > 0.$$

(B) f verifica las siguientes propiedades:

$f(0) = 0,$

Existe $s_0 > 0$ tal que

$$f''(s) > 0 \quad \text{para} \quad s \in [0, s_0[, \text{ y}$$
$$f''(s) \geq 0 \quad \text{para} \quad s \in [s_0, +\infty[$$

$f(s) - sf'(s) > 0$ para $s > 0$.

Antes de enunciar nuestro primer teorema introducimos una definición de solución para el problema de frontera

$$-u'' = \lambda m(x)f(u) \quad \text{en} \quad]0,1[,$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

Definición 1. Diremos que $u \in \mathcal{C}([0,1])$ es una solución del problema

$$-u'' = \lambda m(x)f(u) \quad \text{en} \quad]0,1[$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

si $u \in \mathcal{C}^2(]0,\alpha[\cup]\alpha,1[)$ y verifica

$$-u'' = \lambda m(x)f(u) \quad \text{en} \quad]0,1[\setminus\{\alpha\}$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

Teorema 1. *Sea $f'(s) > 0$ para $s \geq 0$,*

(a) Si las hipótesis [A] se verifican y $\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = \infty$ entonces existe $\lambda^* > 0$ tal que el problema

$$-u'' = \lambda m(x)f(u) \quad en \quad]0,1[$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

tiene al menos una solución positiva para $\lambda \in]0,\lambda^*[$

(b) Si las hipótesis [B] se verifican y $\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = C$ (C una constante) entonces existen constantes $0 < \underline{\lambda} < \overline{\lambda}$ tales que el problema

$$-u'' = \lambda m(x)f(u) \quad en \quad]0,1[$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

tiene al menos una solución positiva para $\lambda \in]\underline{\lambda},\overline{\lambda}[$

Debemos observar que las soluciones obtenidas en el teorema en general no son soluciones en el sentido de las distribuciones.

2.1 Demostración del teorema

La prueba completa de este teorema se la puede encontrar en un trabajo anterior del primer autor [13]. Brevemente, para demostrar el teorema se debe partir el problema en dos y luego se demuestra por separado que cada uno de ellos tiene solución. Efectivamente se debe probar que los problemas siguientes tienen solución.

$$\begin{cases} -u'' = \lambda f(u) & 0 < x < \alpha \\ u(0) = 0, & u(\alpha) = \rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u'' = \lambda f(u) & \alpha < x < 1 \\ u(\alpha) = \rho, & u(1) = 0 \end{cases}$$

para algún $\rho > 0$.

Proposición 2. *Si las hipótesis de la parte **(a)** del teorema se verifican, entonces existe $\lambda^* > 0$ tal que*

$$\begin{cases} -u'' = \lambda f(u) & 0 < x < \alpha \\ u(0) = 0, & u(\alpha) = \rho \end{cases}$$

tiene al menos una solución positiva, u, para cada $\lambda \in]0,\lambda^*[$. Además la solución u verifica

$$u'(\alpha^-) = 0$$

[1] $\mathcal{PC}[0,1]$ es el conjunto de funciones continuas por pedazos definidas en el intervalo [0,1].

Demostración. De la ecuación diferencial, positividad y concavidad de u en $]0,\alpha[$, se tiene que:

$$u'(x) = \sqrt{2\lambda[F(p) - F(u)]},$$

donde $F(u) = \int_0^u f(s)ds$ que, por integración, se obtiene:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^\rho \frac{ds}{\sqrt{F(\rho) - F(u)}}.$$

Definamos la función tipo "time mapping" por

$$G(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^\rho \frac{ds}{\sqrt{F(\rho) - F(u)}}.$$

Si se hace $u = \rho v$ v en la fórmula anterior, se tiene

$$G(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{F(\rho) - F(\rho v)}}.$$

De las hipótesis dadas sobre f, se tiene que G es decreciente, acotada y $G(\rho) \to 0$, cuando $\rho \to +\infty$.

Del análisis anterior la conclusión de la proposición es evidente. □

3 El sistema de ecuaciones diferenciales

En lo que sigue, utilizaremos las técnicas descritas antes y un teorema de punto fijo para poder demostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales que describimos abajo tiene al menos una solución. El sistema diferencial a tres puntos al borde que estudiaremos es:

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda(m(t)f(u) + h(t)f(v)) \quad \text{en} \quad]0,1[\\ -v'' &= g(t,u) \quad \text{en} \quad]0,1[\end{aligned}$$

$$u(0) = v(0) = 0,$$

$$u(1) = \varsigma_1 u(\alpha); \quad v(1) = \varsigma_2 v(\alpha),$$

donde $0 < \varsigma_1, \varsigma_2 < 1$ y $m : [0,1] \to \{0,1\}$, $m : [0,1] \to \{-1,0\}$ definidas por:

$$m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \alpha, \\ 0 & \text{si } \alpha < x < 1. \end{cases}$$

y

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \alpha, \\ -1 & \text{si } \alpha < x < 1. \end{cases}$$

Para resolver este problema debemos dividirlo en dos, así:

$$\begin{cases} -u'' = \lambda f(u) \\ -v'' = g(t,u) \\ u(0) = v(0) = 0; u(\alpha) = \rho_1, v(\alpha) = \rho_2 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \quad u'' = \lambda f(v) \\ -v'' = g(t,u) \\ u(\alpha) = \rho_1, v(\alpha) = \rho_2; u(1) = \rho_1\varsigma_1, v(1) = \rho_2\varsigma_2 \end{cases}$$

Lemma 3. *Si los sistemas*

$$\begin{cases} -u'' = \lambda f(u) \\ -v'' = g(t,u) \\ u(0) = v(0) = 0; u(\alpha) = \rho_1, v(\alpha) = \rho_2 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \quad u'' = \lambda f(v) \\ -v'' = g(t,u) \\ u(\alpha) = \rho_1, v(\alpha) = \rho_2; u(1) = \rho_1\varsigma_1, v(1) = \rho_2\varsigma_2 \end{cases}$$

tienen solución, entonces el sistema

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda(m(t)f(u) + h(t)f(v)) \quad en \quad]0,1[\\ -v'' &= g(t,u) \quad en \quad]0,1[\end{aligned}$$

$$u(0) = v(0) = 0,$$

$$u(1) = \varsigma_1 u(\alpha); \quad v(1) = \varsigma_2 v(\alpha)$$

tendrá también solución.

Teorema 4. *Sean $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una función de clase $\mathcal{C}^1([0,1] \times \mathbb{R})$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ elemento de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tal que verifique las condiciones*

i) $f'(s) > 0$ *para* $s \geq 0$

ii) $f''(s) > 0$ *para* $s \geq 0$

iii) $f(0) = 0$,

iv) $f(s) - sf'(s) < 0$ *para* $s > 0$

v) $\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = \infty$.

Si, además, f y g son funciones Lipschitz continuas con constantes η y τ, respectivamente $(0 < \tau < 1)$, entonces existe $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \in]0,\lambda^*[$, el sistema

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda(m(t)f(u) + h(t)f(v)) \quad en \quad]0,1[\\ -v'' &= g(t,u) \quad en \quad]0,1[\end{aligned}$$

$$u(0) = v(0) = 0,$$

$$u(1) = \varsigma_1 u(\alpha); \quad v(1) = \varsigma_2 v(\alpha)$$

tiene al menos una solución positiva.

Para la demostración de este teorema vamos a utilizar las siguientes proposiciones y lema.

Proposición 5. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, existe $\lambda^1 > 0$ tal que el sistema*

$$\begin{cases} -u'' = \lambda f(u) \\ -v'' = g(t,u) \\ u(0) = v(0) = 0; u(\alpha) = \rho_1, v(\alpha) = \rho_2 \end{cases}$$

tiene al menos una solución positiva $\lambda \in]0,\lambda^1[$.

Demostración. Si en la proposición 2 se toma $\rho = \rho_1$, entonces se encuentra que existe $\lambda^1 > 0$ tal que para $\lambda \in]0, \lambda^1[$ la primera ecuación del sistema tiene al menos una solución u que verifica las condiciones de frontera y es positiva. Para esta u por integración directa se encuentra v positiva que cumpla con la segunda ecuación del sistema. □

Para resolver el segundo sistema

$$\begin{cases} u'' = \lambda f(v) \\ -v'' = g(t,u) \\ u(\alpha) = \rho_1, v(\alpha) = \rho_2; u(1) = \rho_1 \varsigma_1, v(1) = \rho_2 \varsigma_2 \end{cases}$$

Vamos a utilizar un teorema de punto fijo, para lo cual necesitamos los siguientes lema y proposición.

Lemma 6. *Sean $y \in \mathcal{C}[\alpha, 1]$ y $0 < \varsigma < 1$; por lo tanto el problema*

$$\begin{cases} u''(t) + y(t) = 0 \\ u(\alpha) = \rho,\ u(1) = \varsigma\rho \end{cases}$$

tiene una única solución

$$u(t) = \rho + \frac{t-\alpha}{1-\alpha}\left\{\rho(\varsigma - 1) + \int_\alpha^1 (1-s)y(s)ds\right\} - \int_\alpha^t (t-s)y(s)ds$$

Demostración. Se utiliza el método del disparo.

Ahora, aplicamos el lema [6] al sistema

$$\begin{cases} u'' = \lambda f(v) \\ -v'' = g(t,u) \\ u(\alpha) = \rho_1, v(\alpha) =; u(1) = \rho_1 \varsigma_1, v(1) = \rho_2 \varsigma_2 \end{cases}$$

y obtenemos un problema equivalente

$$u(t) = \rho_1 + \frac{t-\alpha}{1-\alpha}\left\{\rho_1(\varsigma_1 - 1) - \int_\alpha^1 \lambda(1-s) f(v(s))ds\right\} + \int_\alpha^t \lambda(t-s) f(v)ds,$$

$$v(t) = \rho_2 + \frac{t-\alpha}{1-\alpha}\left\{\rho_2(\varsigma_2 - 1) + \int_\alpha^1 (1-s)g(u)ds\right\} - \int_\alpha^t (t-s)g(u)ds.$$

A este nuevo sistema vamos a aplicar el teorema de punto fijo de Banach para así obtener una solución del sistema de ecuaciones diferenciales; este resultado se expresa en la siguiente proposición. □

Proposición 7. *Si las funciones f y g definidas en el sistema*

$$\begin{cases} u'' = \lambda f(v) \\ -v'' = g(t,u) \\ u(\alpha) = \rho_1, v(\alpha) =; u(1) = \rho_1 \varsigma_1, v(1) = \rho_2 \varsigma_2 \end{cases}$$

son Lipschitz continuas con constantes η y τ respectivamente ($0 < \tau < 1$), entonces el sistema anterior tiene al menos una solución $u = u(t)$ y $v = v(t)$, y ambas funciones son elementos de $\mathcal{C}[\alpha, 1]$, para cada $\lambda \in]0, \lambda^2[$, donde $\lambda^2 = \dfrac{1}{\eta(1-\alpha)^2} - \dfrac{\tau}{\eta}$.

Finalmente podemos de probar el teorema 4.

Teorema 4. Sean $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una función de clase $\mathcal{C}^1([0,1] \times \mathbb{R})$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ elemento de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tal que verifique las condiciones

i) $f'(s) > 0$ para $s \geq 0$

ii) $f''(s) > 0$ para $s \geq 0$

iii) $f(0) = 0$,

iv) $f(s) - sf'(s) < 0$ para $s > 0$

v) $\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = \infty$.

Si, además, f y g son funciones Lipschitz continuas con constantes η y τ, respectivamente $(0 < \tau < 1)$, entonces existe $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \in]0, \lambda^*[$, el sistema

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda(m(t)f(u) + h(t)f(v)) \quad \text{en} \quad]0,1[\\ -v'' &= g(t,u) \quad \text{en} \quad]0,1[\end{aligned}$$

$$u(0) = v(0) = 0,$$
$$u(1) = \varsigma_1 u(\alpha); \quad v(1) = \varsigma_2 v(\alpha)$$

tiene al menos una solución positiva.

Demostración del teorema 4. De las proposiciones [5] y [7] es suficiente tomar $\lambda^* = \min\{\lambda^1, \lambda^2\}$ para que el teorema quede demostrado. □

Referencias

[1] S. Alama, M. Del Pino, "Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via Morse theory and linking", Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 13, 95-115, 1996.

[2] S. Alama, G. Tarantello, "On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities", Cal. Var., 1, 439-475, 1993.

[3] S. Alama, G. Tarantello, "Elliptic Problems with Nonlinearities Indefinite in Sign", Journal of Functional Analysis, 141, 159-215, 1996.

[4] A. Ambrosetti, "Critical Points and Nonlinear Variational Problems", Cours de la Chaire Lagrange, Mémoire (nouvelle série) No 49, Supplément au Bulletin de la Société Mathématique de France, 120, 1-139, 1992.

[5] A. Ambrosetti, M. Badiale, "The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities", J. Math. Anal. Appl., 140, 363-373, 1989.

[6] A. Ambrosetti, M. Calahorrano, F. Dobarro, "Global branching for discontinuos problems", Comment Math. Univ. Carolina, 31, 213-222, 1990.

[7] A. Ambrosetti, K. C. Chang, I. Ekeland, "Nonlinear Functional Analysis and applications to differential equations", World Scientific, (1998).

[8] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, "Nonlinear Analysis and Semilinear elliptic Problems", Cambridge University Press, 2007.

[9] A. Ambrosetti, M. Struwe, "Existence of steady vortex rings in an ideal fluid", Arch. Rat. Mech. Anal., 108, 97-109, 1989.

[10] A. Anane, O. Chakrone, M. Moussa, "Spectrum of one dimensional p-Laplacian Operator with indefinite weight", EJQTDE, 17, 1-11, 2002.

[11] D. Arcoya, M. Calahorrano, "Some Discontinuos Problems with a Quasilinear Operator", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 187, 1059-1072, 1994.

[12] H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolcetta, L. Nirenberg, "Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems", NoDEA, 2, 553-572, 1995.

[13] M. Calahorrano, "Existencia de soluciones positivas para problemas no lineales con discontinuidades indefinidas", Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 13, 95-101, 2007.

[14] M. Calahorrano, "Existence and multiplicity of solutions for elliptic problems with indefinite discontinuous nonlinearities", PAMM, Proc. Appl. Math. Mech., 7, 1040303-1040304, 2007.

[15] M. Calahorrano, J. Mayorga, "Un problema discontinuo con operador cuasilineal", Revista Colombiana de Matemáticas, 35, 1-11, 2001

[16] A. Castro, "Non negative solutions for nonpositone problems", Lect. College on Variational Methods, ICTP, Trieste, 1-12, 1988.

[17] A. Castro, A. Kurepa, "Energy analysis of a nonlinear singular differential equation and applications", Rev. Colombiana Mat., 21, 155-166, 1987.

[18] A. Castro, C. Maya, R. Shivaji, "Nonlinear eigenvalue problems with semipositone structure", EJDE, Conf. 05, 33-49, 2000.

[19] A. Castro, R. Shivaji, "Nonnegative solutions for a class of nonpositone problems", Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 108, 291-302, 1988.

[20] A. Castro, R. Shivaji, "Nonnegative solutions for a class of radially symmetric nonpositone problems", Proc. Amer. Math. Soc., 106, 735-740, 1989.

[21] K. C. Chang, M.Y. Jiang, "Dirichlet problem with indefinite nonlinearities", Calculus of Variations, 20, 257-282, 2004.

[22] M. Cuesta, "Eigenvalue problems for the p-Laplacian with indefinite weights", Electronic Journal of Differential Equations, 33, 1-9, 2001.

[23] D. G. De Figueiredo, "Semilinear Elliptic Systems", School on Differential Equations, ICTP, Trieste, 2006.

[24] D. G. de Figueiredo, J. P. Gossez, P. Ubilla, "Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems", Journal of Functional Analysis, 199, 452 - 467, 2003.

[25] M. García-Huidobro, R. Manásevich, C. Yarur, "Some results about positive solutions of a nonlinear equation with a weighted Laplacian", Bol. Soc. Parana. Mat., 22, 57-65, 2004.

[26] R. Manásevich, F. Zanolin, "Time-mappings and multiplicity of solutions for the one-dimensional p-Laplacian", Nonlinear Anal., 21, 269-291, 1993.

[27] D. Papini, F. Zanolin, "A topological approach to superlinear indefinite boundary value problems", Topol. Methods Nonlinear Anal., 15, 203-233, 2000.

[28] D. Papini, F. Zanolin, "Differential equations with indefinite weight: boundary value problems and qualitative properties of the solutions", Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 60, 265-296, 2002.

[29] D. Papini, F. Zanolin, "Periodic points and chaotic-like dynamics of planar maps associated to nonlinear Hill's equations with indefinite weight", Georgian Mathematical Journal, 9, 339-366, 2002.

[30] C. Stuart, "Differential equations with discontinuous nonlinearities", Arch. Rat. Mech. Anal., 63, 59-75, 1976.

[31] C. Stuart, J. F. Toland, "A variational method for boundary value problems with discontinuous nonlinearities", J. London Math. Soc., 21, 319-328, 1980.