

# Control Predictivo Aplicado a un Robot Móvil

Gonzales O.\*; Rosero J.\*; Rosales A.\*

\*Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Quito, Ecuador  
e-mail: {oscar.gonzalez,jorge.rosero,andres.rosales}@epn.edu.ec

**Resumen:** El presente artículo se enfoca en el diseño de un Control Predictivo Basado en Modelo (MPC) en un robot móvil para seguimiento de trayectorias. Este controlador es obtenido mediante la linealización del sistema mediante series de Taylor. El robot móvil es el Pioneer 3DX[1], con el cual, se realiza la implementación de la estrategia de control para concluir con ventajas o desventajas del uso del MPC en la robótica.

**Palabras clave:** Control Predictivo, MPC, robot móvil, modelo dinámico, linealización.

**Abstract:** This article is based on the design of a Model Predictive Control (MPC in a mobile robot for path tracking). This controller is obtained by linearization of the system using Taylor series. The mobile robot used is the Pioneer 3DX [1] which the implementation of the control strategy is performed in order to conclude with advantages or disadvantages about using MPC in robotics.

**Keywords:** Predictive Control, MPC, mobile robot, dynamic model, linearization.

## 1. INTRODUCCION

Este artículo formula un Controlador Predictivo Basado en Modelo en un robot móvil, para observar su desempeño en el campo de la robótica, ya que en los últimos años se está investigando en este terreno aparentemente nuevo para esta estrategia de control, partiendo de la premisa de que el MPC ya ha sido utilizado ampliamente en el campo de control de procesos, donde se ha obtenido muy buenos resultados.

El MPC basa su desempeño en predicciones, tanto de las variables de entrada como de salida del controlador. Estas predicciones se identifican por parámetros llamados horizontes de predicción  $N_c$  y horizonte de control  $N_p$ , mediante los cuales, es posible predecir el cambio de las variables y efectuar una o más acciones sobre esas predicciones, respectivamente.

El número de predicciones puede convertirse en una buena estrategia para la sintonización del controlador hasta cierto punto, ya que una desventaja del uso de este controlador consiste en su carga computacional, la cual puede ser muy alta comparándola con otras estrategias de control [2].

También se puede cambiar las penalizaciones de las variables usadas en el control, de modo que el sistema puede dar prioridad a variables que necesiten mayor atención en el proceso respecto a otras, de las cuales es importante obtener información pero necesitan ponderaciones bajas ya que tienen poca influencia en el desempeño del control.

En el paper se propone el diseño del MPC, el cual toma el modelo linealizado del robot [3], porque el manejo del mismo es mucho más versátil comparándolo con el Control Predictivo Basado en Modelo No lineal (NMPC) el cual tiene

una mayor complejidad matemática en su formulación [4]. Para finalizar, se incorporan restricciones las cuales hacen que el sistema no supere los límites de operación en cuanto a la señal de control recibida a su entrada. De esta forma se realizan las respectivas simulaciones del modelo, con deferentes trayectorias para establecer las capacidades del MPC.

El trabajo se organiza de la siguiente manera: en la sección II se presenta el modelo dinámico del robot móvil Pioneer 3DX, en la sección III se realiza el diseño del MPC, en la sección IV se obtienen las simulaciones del sistema con el controlador y finalmente en la sección V, se muestran las conclusiones obtenidas del presente trabajo..

## 2. MODELO DINÁMICO DEL SISTEMA

El modelo del sistema se convierte en un parámetro de suma importancia en la implementación del MPC, debido a que este puede realizar las predicciones con información orientada sobre la dinámica del sistema.

El robot a considerar es el Pioneer 3DX, cuyo modelo y validación son determinados en [1]. El gráfico del modelo en estudio se presenta en la Figura 1, en el cual el centro del robot está ubicado en  $h$ , de este punto se consideran los desplazamientos del sistema en el plano  $x$  e  $y$ . Además se encuentra desplazado del centro de masa del sistema una distancia  $a$ , el cual se mueve a una velocidad  $u$  longitudinalmente, a una velocidad  $u$  lateralmente y a una velocidad  $\omega$  angularmente. El parámetro  $\phi$  es el ángulo de la orientación y los elementos restantes que se destacan en la gráfica son:  $C$  es el punto del castor del robot,  $E$  es el punto de la herramienta de trabajo,  $G$  es el centro de gravedad y  $B$  es la línea que pasa por el centro de masa y el eje de los motores de las ruedas.

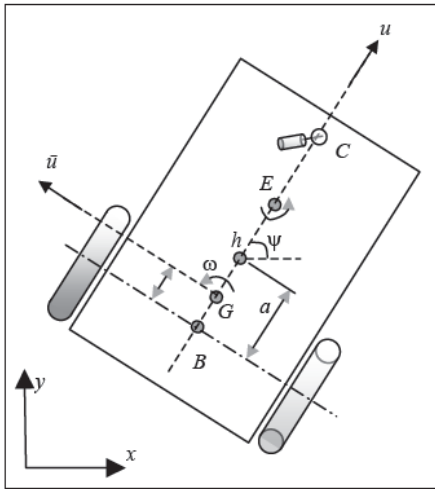


Figura 1. Esquema de un robot móvil tipo unicycle [1].

El modelo dinámico no lineal del robot, expresado en espacio de estados es el siguiente [1]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\omega} \\ \dot{u} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos \varphi - a \sin \varphi \\ u \sin \varphi + a \cos \varphi \\ \omega \\ \frac{\theta_3}{\theta_1} \omega^2 - \frac{\theta_3}{\theta_1} u \\ -\frac{\theta_5}{\theta_2} u \omega - \frac{\theta_6}{\theta_2} \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\theta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ \omega_c \end{pmatrix} \quad (1)$$

Los parámetros validados del robot son:

- $\theta_1 = 0.24089$
- $\theta_2 = 0.2424$
- $\theta_3 = -0.00093603$
- $\theta_4 = 0.99629$
- $\theta_5 = -0.0037256$
- $\theta_6 = 1.0915$

Se establecen las siguientes variables de estado:

$x(t) = [x \ y \ \varphi \ u \ \omega]^T$ , donde se expresan la posición en x, la posición en y, la orientación, la velocidad lineal y angular del robot, respectivamente. Las acciones de control se denotan por  $v(t) = [u_c \ \omega_c]^T$ , las cuales están relacionadas con el torque necesario que debe proporcionar cada rueda para el movimiento del sistema [1].

Genéricamente, las ecuaciones no lineales, provenientes del modelo de algún sistema determinado, están en función de las variables de estado y la(s) variables de control y se expresan por la siguiente ecuación:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2)$$

Donde  $\dot{x}$  son las variables de estado. El siguiente paso es plantear linealmente el modelo de dinámico debido a que el controlador predictivo a implementar es lineal. Existen varias formas de linealizar un sistema pero se hará uso del método de linealización por expansión en series de Taylor [4], donde se desarrolla los términos no lineales en dicha serie y solo se consideran los términos: fundamental y de primer orden, dejando de lado los términos de orden superior.

$$\dot{x} = f(x_r, u_r) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x=x_r, u=u_r} (x - x_r) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x=x_r, u=u_r} (u - u_r) \quad (3)$$

Al hacer esto se comete un error pequeño pero la aproximación es bastante buena si se trabaja en el punto de operación, o en una vecindad cercana al punto de operación del sistema representados por las variables  $x_r, u_r$ .

De esta forma, se puede obtener de forma aproximada las expresiones que describen el comportamiento del sistema matricialmente, es decir, los valores de A y B para formular el modelo en espacio de estados:

$$\dot{\tilde{x}} = f_x \tilde{x}(t) - f_u \tilde{u}(t) \quad (4)$$

Donde:  $\tilde{x}$  es la derivada alrededor del punto de operación,  $f_x$  y  $f_u$  se obtienen de las derivadas parciales de la expresión de Taylor,  $\tilde{x}$  y  $\tilde{u}$  son las desviaciones de las variables de estado respecto al punto de trabajo.

Para discretizar al sistema, existen varias opciones, pero hace uso del método de Euler con el cual el sistema linealizado queda expresado como:

$$\tilde{x}(k+1) = f_x \tilde{x}(k) - f_u \tilde{u}(k) \quad (5)$$

### 3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

#### 3.1 Formulación del Modelo del Controlador

A partir del modelo del sistema expresado en variables de estado discretas, se formula las variables de estado en el diseño del MPC mediante [5].

$$\tilde{x}_m(k+1) = A_m \tilde{x}_m(k) - B_m \tilde{u}_m(k) \quad (6)$$

Donde las variables de estado son:  $\tilde{x}_m(k) = [\Delta \tilde{x}_m \ \tilde{y}]^T$  el incremento de la desviación de las variables de estado y la desviación de las variables controladas.

El objetivo del controlador será llevar la variable de estado de posición de un estado inicial a un estado de referencia, pero como se está trabajando con las desviaciones, el objetivo pasará a ser el reducir la diferencia que existe entre la

variable actual y su objetivo, en otras palabras, las desviaciones de las variables de estado deben tener una tendencia a cero.

3.2 Función de Costo

El objetivo del MPC gira en torno a la minimización de dos factores: el error de la variable con respecto a su consigna y a la señal de control. La siguiente expresión refleja matemáticamente los objetivos mencionados anteriormente:

$$J = (Ref - Y)^T Q(Ref - Y) + \Delta U^T R \Delta U \quad (7)$$

Donde se distingue: *Ref* a las trayectorias de referencia, *Y* las salidas del sistema, *U* las señales de control, *Q* y *R* son matrices diagonales que representan a las ponderaciones a las variables del sistema y a la variable de control, respectivamente. Estas matrices deben ser positivamente definidas. Hay que recordar que se trabajan con variables de desviación, por lo que el setpoint deseado es cero.

3.3 Restricciones

Las restricciones del modelo se implementan en la señal de control con el objeto de que esta no sobrepase los límites recomendados en la planta. La expresión de las restricciones en el sistema es la siguiente:

$$u_{min} \leq u(k) \leq u_{max} \quad (8)$$

Donde se consideran las variables de control con los siguientes valores que rigen sus puntos mínimos y máximos de actuación:

$$-5[m/s] \leq u_c(k) \leq 5[m/s] \quad (9)$$

$$-5[rad/s] \leq \omega_c(k) \leq 5[rad/s] \quad (10)$$

4. RESULTADOS

El tiempo de muestreo utilizado es  $T = 0.01$  [s] para todas las curvas de prueba. Se simulan 3 trayectorias de naturaleza distinta: un cuadrado, un círculo y una lemniscata de Bernoulli (curva en forma de ocho), debido a que la prueba del controlador enfrenta diferentes retos con diferentes curvas. De las simulaciones se realizan se obtienen los siguientes resultados:

4.1 Trayectoria Cuadrada

En esta trayectoria, los valores usados como referencias del plano fueron los de un cuadrado de lado  $L = 16$ , como se aprecia en la Figura 2, la orientación se plantea paralela a cada lado del cuadrado. En cuanto a las velocidades, los valores son:  $u = [m/s]$  y  $\omega = \dot{\varphi}$ .

Los parámetros del controlador que se usaron son:

$Np = 12$ ,  $Nc = 3$ , la ponderación a la variable de control es  $R=0.01$ , mientras que las ponderaciones a las variables de estado del sistema:  $x, y, u, \varphi$  y  $\omega$  son:  $Q_1=30$ ,  $Q_2=30$ ,  $Q_3=5$ ,  $Q_4=2$ ,  $Q_5=1$ , respectivamente.

Las ponderaciones son iguales para cada variable de control, en cambio, para las variables de estado son distintas debido a que se da prioridad a la posición del robot más que a sus velocidades. La respuesta del robot, ante una trayectoria cuadrada se observa en la Figura 2:

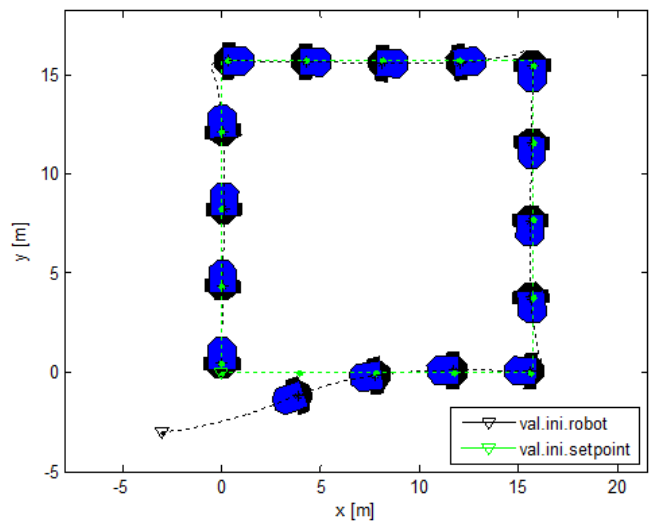


Figura 2. Simulación del MPC en trayectoria cuadrada.

Los errores de seguimiento, vienen dados por las Figuras 3 y 4:

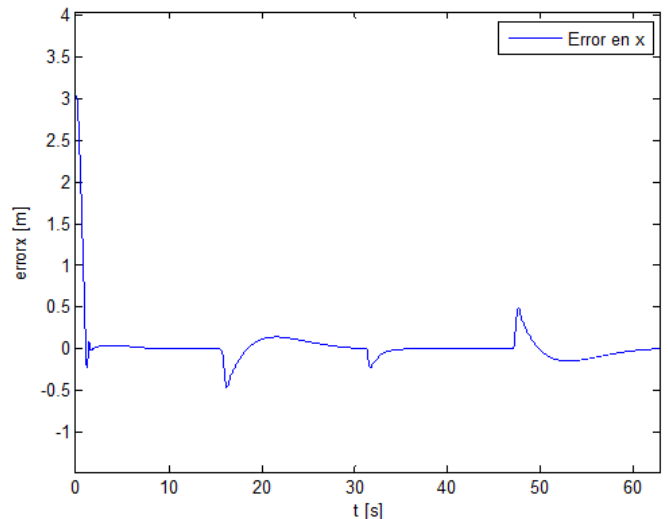


Figura 3. Error en x de la simulación en la trayectoria cuadrada.

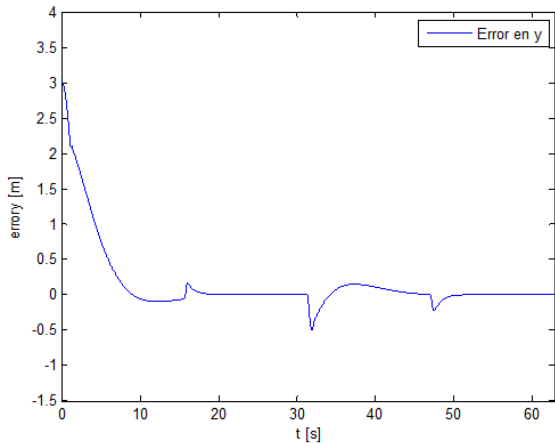


Figura 4. Error en y de la simulación en la trayectoria cuadrada.

Se observa que el sistema tiene un buen seguimiento en la mayor parte de la trayectoria, en la cual se contrasta un poco con los valores altos que se manifiestan como picos, estos valores tienen que ver con el paso del robot por las esquinas del cuadrado donde el cambio de orientación es demasiado brusco.

En cuanto a las velocidades del sistema, las gráficas se observan en las Figuras 5 y 6:

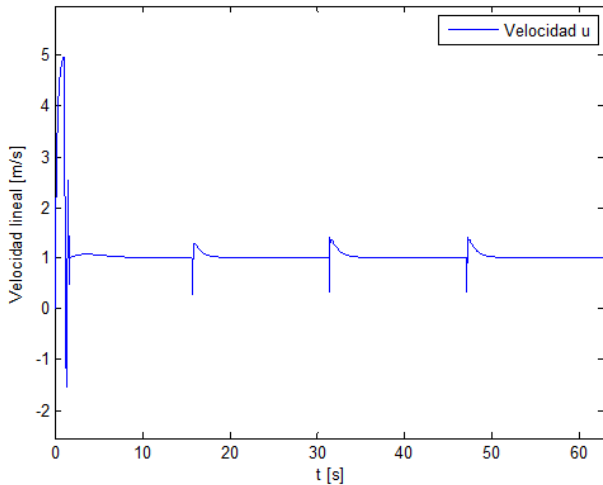


Figura 5. Velocidad en u de la simulación en la trayectoria cuadrada.

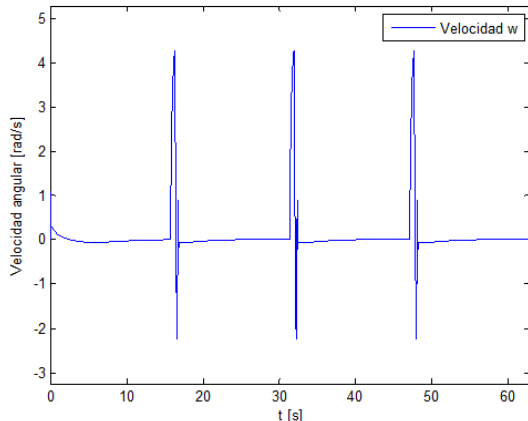


Figura 6. Velocidad en  $\omega$  de la simulación en la trayectoria cuadrada.

Las señales de control del robot, toman los siguientes valores como se aprecia en la Figura 7:

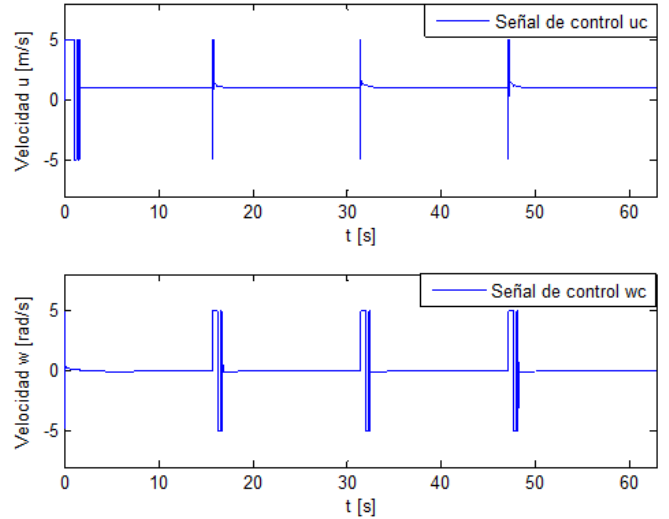


Figura 7. Señales de control de la simulación en la trayectoria cuadrada..

#### 4.2 Trayectoria Circular

Se propone una segunda trayectoria que es un círculo, el cual se muestra en la Figura 8, con características completamente distintas a la primera. Las ecuaciones que describen al círculo son:

$$x = R\cos(\omega t) \tag{11}$$

$$y = R\sin(\omega t) \tag{12}$$

El valor del radio es  $R = 10[m]$ . Los valores de referencia para la orientación se obtienen como la tangente del centro de masa con respecto al círculo, para las velocidades, estos valores son:  $u = 1[m/s]$  y  $\omega = 0.1[rad/s]$ . La respuesta del robot a esta trayectoria se puede observar a continuación:

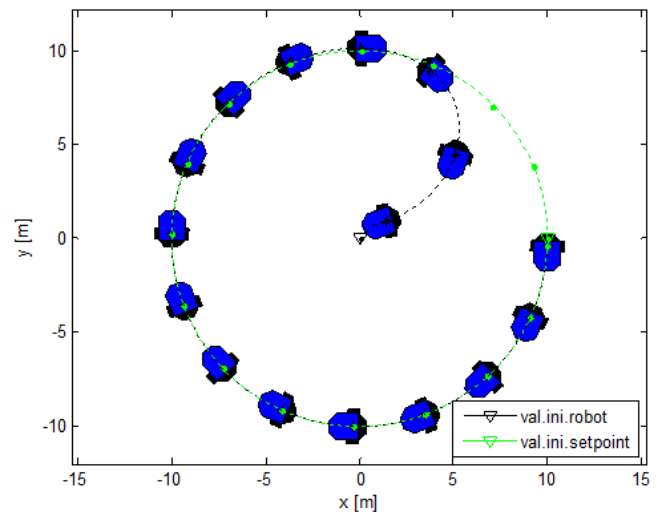


Figura 8. Simulación del MPC en trayectoria circular.

Los errores obtenidos para esta trayectoria se observan en las Figuras 9 y 10:

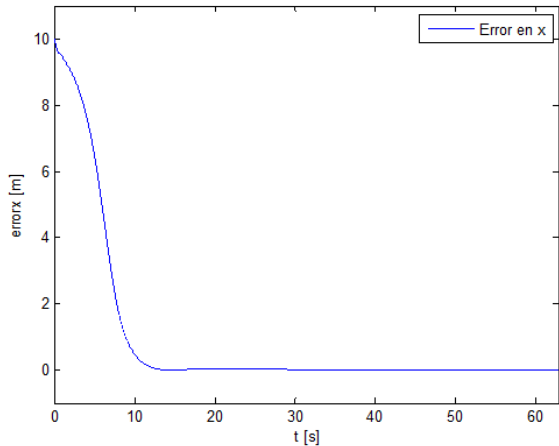


Figura 9. Error en x de la simulación en la trayectoria circular.

Se puede observar que el sistema tiene un error mínimo. Al ser el cambio suave en la trayectoria circular, se puede asimilar mejor los cambios de orientación que debe hacer el robot.

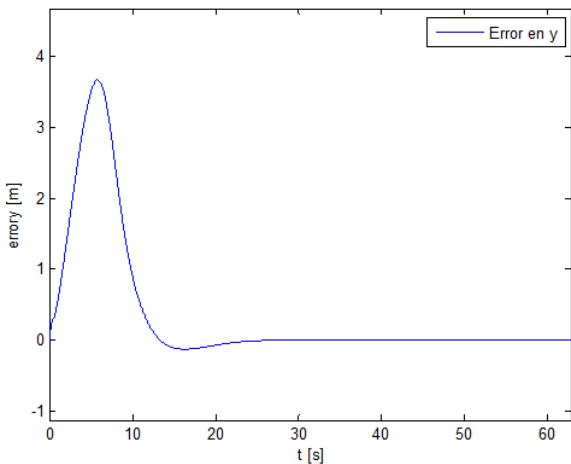


Figura 10. Error en y de la simulación en la trayectoria circular.

En cuanto a las velocidades del sistema, las gráficas están en las Figuras 11 y 12:

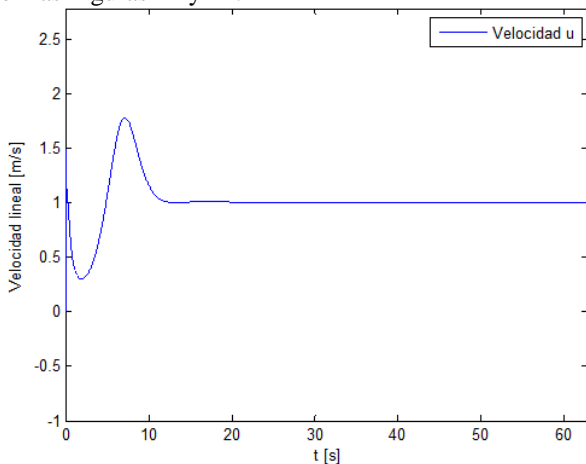


Figura 11. Velocidad en u de la simulación en la trayectoria circular.

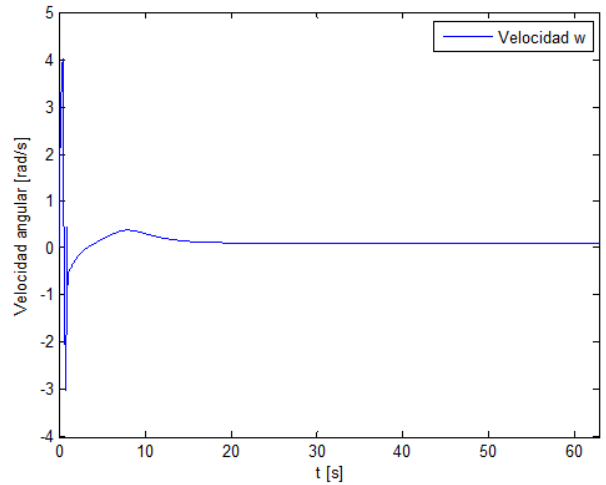


Figura 12. Velocidad en  $\omega$  de la simulación en la trayectoria circular.

Las velocidades mantienen valores constantes en casi toda la trayectoria del robot, estos valores coinciden con los valores prefijados como referencias. Las señales de control producidas en esta trayectoria se pueden observar en la Figura 13:

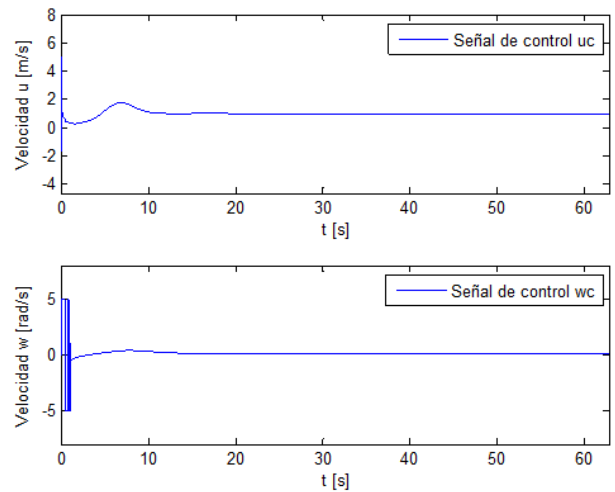


Figura 13. Señales de control de la simulación en la trayectoria circular.

### 4.3 Trayectoria Lemniscata de Bernoulli

Esta trayectoria tiene forma de ocho, en la cual, se pueden observar zonas en donde hay cambios suaves y un poco bruscos en la curvatura. La ecuación de esta gráfica, de donde se obtendrá la referencia para el seguimiento en el plano, es:

$$x = \frac{10\sqrt{2}\cos^2(\omega t)}{\text{sen}^2(\omega t)+1} \tag{13}$$

$$y = \frac{10\sqrt{2}\cos(\omega t)\text{sen}(\omega t)}{\text{sen}^2(\omega t)+1} \tag{14}$$

Los valores de referencia para la orientación se obtienen de la siguiente expresión:

$$\varphi = \text{atan} \frac{y'}{x'}$$

Para las velocidades, estos valores son:  $u=1[m/s]$  y  $\omega=0.1[rad/s]$ . De esta manera, el comportamiento del robot móvil en la trayectoria en forma de ocho es el mostrado en la Figura 14:

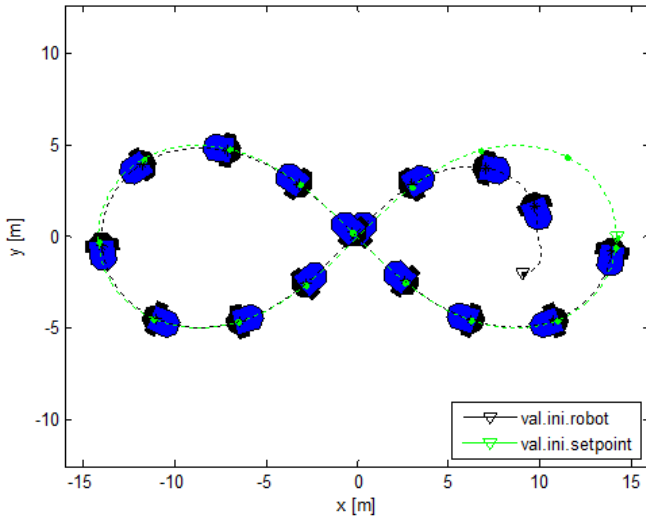


Figura 14. Simulación del MPC en trayectoria lemniscata de Bernoulli.

Los errores en esta trayectoria están en las Figuras 15 y 16:

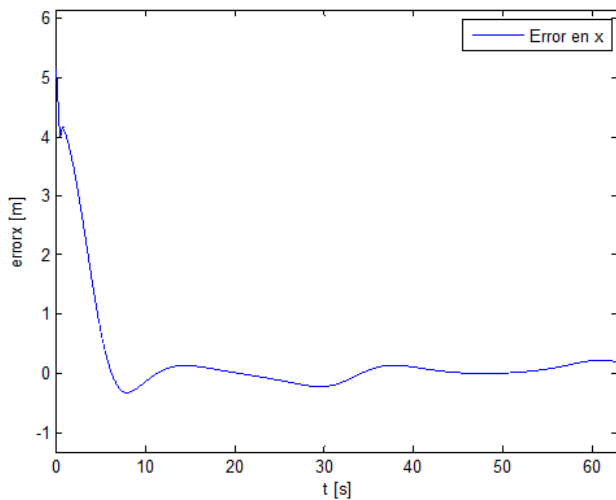


Figura 15. Error en x de la simulación en la trayectoria lemniscata de Bernoulli.

Se puede observar que el sistema presenta un buen seguimiento en tramos de poca curvatura, En los tramos de mayor curvatura, el error se incrementa pero no tiene una tendencia alta.

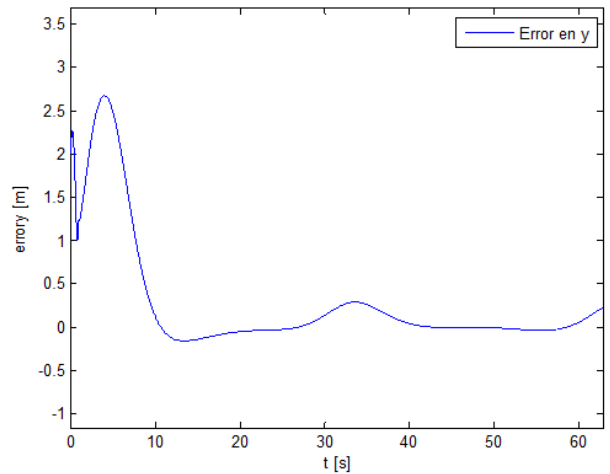


Figura 16. Error en y de la simulación en la trayectoria lemniscata de Bernoulli.

En cuanto a las velocidades del sistema, las gráficas son las Figuras 17 y 18:

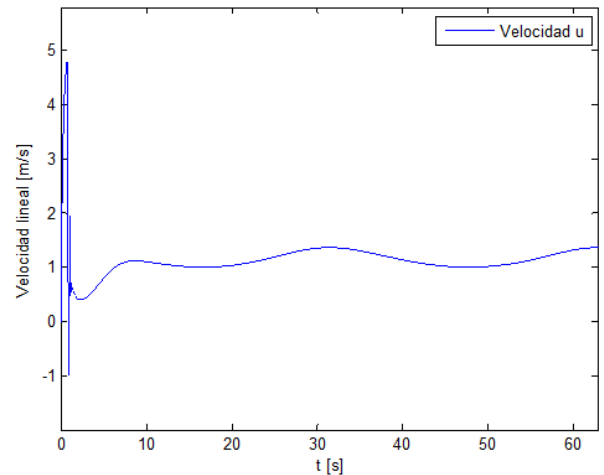


Figura 17. Velocidad en u de la simulación en la trayectoria lemniscata de Bernoulli.

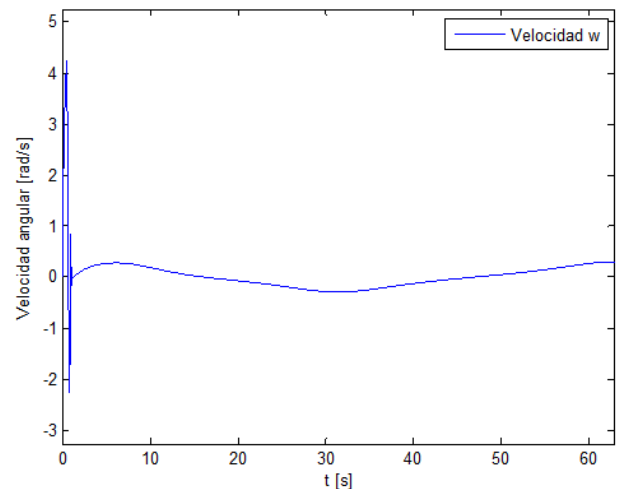
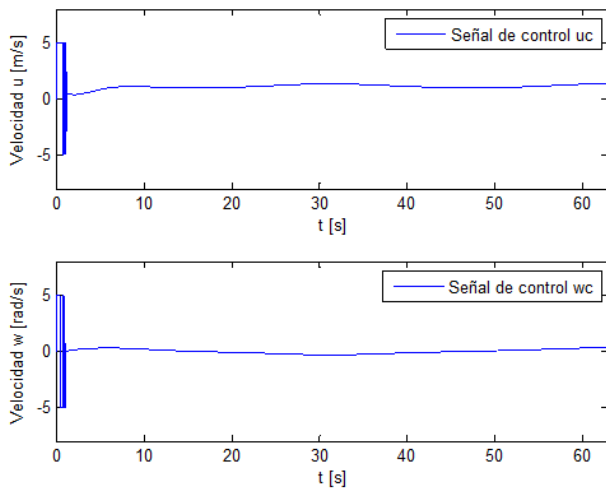


Figura 18. Velocidad en  $\omega$  de la simulación en la trayectoria lemniscata de Bernoulli.

Las señales de control producidas en esta trayectoria están en la Figura 19:



**Figura 19.** Señales de control de la simulación en la trayectoria lemniscata de Bernoulli.

## 5. CONCLUSIONES

El objetivo de formular una estrategia de control mediante el MPC lineal se consigue trabajando en el modelo del robot móvil proporcionado por [1].

Las trayectorias seleccionadas son de distinta complejidad con el objetivo de probar el control en dos ambientes distintos, en uno con una trayectoria uniforme con pocos cambios bruscos y la segundo en una trayectoria con bastantes cambios pero una manera uniforme.

La señal de control obtenida, hace que el sistema Figura 19. Señales de control de la simulación en la trayectoria lemniscata de Bernoulli. cumpla con su objetivo. En un principio, si el error es grande tiende a saturarse debido a las restricciones implementadas, haciendo que el controlador trabaje con todas las capacidades planteadas.

El control realizado en todas las variables de estado del sistema hace que el controlador mejore su rendimiento, debido a que se consideran más factores al momento de establecer un objetivo. En cierta forma el controlador tiene un esquema parecido al de un LQR, el cual también posee una función de costo por minimizar y ponderaciones a todas las variables de estado de la planta.

En futuros trabajos, se recomienda analizar más modelos, y tener como estrategia auxiliar, un MPC no lineal. Los contrastes encontrados en este tema de investigación, tienen que ver con la complejidad matemática del modelo, se deben establecer valor de horizonte de predicción altos para obtener una mejor respuesta del modelo lo cual incrementa el costo computacional. Si se implementa esta estrategia de control en un microcontrolador, este debe poseer la capacidad de trabajar con datos matriciales de alto orden.

Añadiendo al punto anterior en lo concerniente a la carga computacional, el tiempo de muestreo utilizado es de valor bajo, de esta manera se consigue un mejor desempeño, por lo que los dispositivos en los cuales el controlador sería instalado, deben ser bastante rápidos.

## REFERENCIAS

- [1] C. De la Cruz y R. Carelli, Dynamic model based formation control and obstacle avoidance of multi-robot systems. San Juan, Argentina: Instituto de Automática, Universidad Nacional de San Juan, 2007.
- [2] E. Moromenacho, C. Zulay y Y. Bravo, Diseño e Implementación del Control Predictivo en Tanques Acoplados. Quito, Ecuador: Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Escuela Politécnica Nacional, 2010.
- [3] V. Menezes y W. Fetter, Linear Predictive Control of a Brachiation Robot. Río Grande, Brasil: Department of Mathematics, Federal University of Rio Grande.
- [4] A. Rosales, M. Peña, G. Scaglia, V. Mut y F. Di Sciascio, Control Predictivo Basado en el Modelo de un Robot Móvil. San Juan, Argentina: Instituto de Automática, Universidad Nacional de San Juan, 2007.
- [5] L. Wang, "Model Predictive Control System Desing Implementation Using MATLAB". Melbourne, Australia: School of Electrical and Computer Engineering, RMIT University, 2009.