

# Desempeño De Secciones De Hormigón Armado A Flexo-Compresión Mediante El Análisis De La Relación Momento-Curvatura

Medina C.\*

\*Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Civil y Ambiental, Quito, Ecuador  
e-mail: christian.medina@epn.edu.ec

**Resumen:** Se presenta el fundamento teórico de la obtención del Diagrama Momento-Curvatura de una sección sometida a flexo - compresión; en el cual se incluyen los estados límites de deformación descritos. Adicionalmente se incorporan los efectos por corte para obtener el Diagrama de Capacidad de la Sección. Finalmente se estudia la influencia tanto del acero longitudinal como del acero transversal, en la ductilidad de una sección hipotética.

**Palabras clave:** Sección de H.A., Momento-Curvatura, Ductilidad, Capacidad a Corte, Desempeño.

**Abstract:** This paper presents the theoretical basis for obtaining the Moment – Curvature  $M - \phi$  diagram of a section subjected to flexion-compression, in which the limit states of deformation of the section are located, which are described one by one. Additionally, the Shear Capacity diagram is included in order to obtain the Section Capacity diagram. Finally, by using this diagram it is studied the influence of both longitudinal and transversal reinforcement in the ductility of a hypothetical section.

**Keywords:** RC Section, Moment-Curvature, Ductility, Shear Capacity, Performance.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el proceso de análisis estructural es importante conocer la relación Momento-Curvatura de las secciones de los elementos estructurales, con el objetivo de saber cuál es la capacidad de ductilidad de curvatura y la máxima capacidad a flexión del elemento, para poder realizar una comparación entre estos valores y las demandas obtenidas [2].

Generalmente el cálculo lineal elástico suele ser el método de análisis escogido para dimensionar el comportamiento de una estructura en la fase de diseño, por lo que se puede considerar que, en general y para las estructuras más comunes, si un diseño cumple las exigencias de los estados límite de servicio con las hipótesis de la elasticidad, casi se puede asegurar que también va a cumplir el estado límite último.

Sin embargo, en la ingeniería actual existen gran cantidad de situaciones donde los estados límites de servicio o las restricciones en desplazamiento pierden su sentido. Esto es especialmente cierto en diseños de estructuras o zonas de estructuras donde va a existir una gran concentración de tensiones mientras sus desplazamientos van a ser despreciables.

Por otro lado, es evidente que en los planteamientos de reparación y rehabilitación de estructuras el cálculo no lineal es absolutamente necesario. En estos casos el diseño ya ha superado algún estado límite, ya se ha producido alguna rotura parcial, alguna fisuración o alguna deformación excesiva. Por lo tanto, aquello que interesa, es que la estructura no empeore y que pueda seguir trabajando. Es

decir que se mantenga el nuevo estado límite de servicio y se establezca el estado límite último [5].

Así entonces, para realizar un análisis no lineal tanto estático como dinámico previamente se debe establecer la degradación de la inercia de los elementos estructurales, a través de un diagrama Momento-Curvatura, ya que el módulo de rigidez (EI) es igual al momento aplicado dividido para la curvatura en ese punto [4].

Es aquí donde radica la importancia del estudio del diagrama Momento-Curvatura de una sección, pues es una herramienta que permite estudiar parámetros fundamentales para realizar un análisis no lineal como: la degradación de resistencia y rigidez de las secciones cuando se aplican momentos mayores al momento de fluencia, el tipo de falla que probablemente los elementos presentarán, y con ello estimar el mecanismo de falla global de la estructura.

Una vez que se ha establecido un panorama general de la importancia de la temática presentada, el objetivo de este artículo, es aplicar el fundamento teórico del estudio de la relación Momento-Curvatura. Para ello, a continuación se describe el procedimiento de cálculo, aplicado a la demostración de la influencia de las cuantías de acero tanto longitudinal como transversal, en la ductilidad de secciones sometidas a flexo-compresión.

## 2. DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA

De manera general, un punto del *diagrama momento – curvatura*  $M - \phi$  de una sección, se lo obtiene a partir de una

deformación del hormigón  $\xi_c$ , tomando como base la compatibilidad de deformaciones y el equilibrio entre fuerzas y momentos de tensión y de compresión [2]. Dentro de este marco, la profundidad del eje neutro  $c$  se la calcula realizando iteraciones hasta llegar a obtener dicho equilibrio entre fuerzas y momentos. Una vez llegado al equilibrio la curvatura  $\phi$  ( $m^{-1}$ ) se la obtiene de la relación entre la deformación específica del concreto y la distancia desde la fibra más comprimida del concreto al eje neutro, correspondiente a dicha deformación [8].

$$\phi = \frac{\xi_c}{c} \tag{1}$$

Una de las falencias del cálculo manual es que se toma en consideración modelos de comportamiento de los materiales muy simples para el cálculo de los esfuerzos, debido a la simplicidad de las ecuaciones, como el modelo elasto-plasto para el acero, y el modelo de Whitney para el concreto; lo cual resulta en valores de esfuerzo poco aproximados a los reales.

Es por ello que actualmente existen un sin número de programas que calculan este diagrama y aplican modelos más sofisticados. Para el presente estudio se ha utilizado un software que utiliza el modelo de Mander para el concreto, el cual hace diferencia entre el concreto confinado y el no confinado pues considera la resistencia adicional que se genera por el confinamiento del concreto [6], lo cual es más acorde a la realidad.

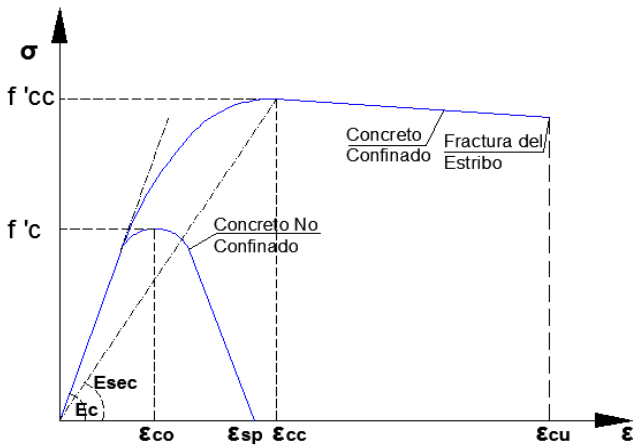


Figura 1 Modelo de Mander para el Concreto.

Para el caso del Acero utiliza un modelo muy similar al propuesto por Park. Este modelo considera una zona de endurecimiento post-fluencia definido en base a tres factores  $K_1, K_2, K_3$ , que relacionan las deformaciones de inicio del endurecimiento, máximo esfuerzo y última, respectivamente, con respecto a la deformación de fluencia; y un factor  $K_4$  que relaciona el máximo esfuerzo con respecto al esfuerzo de fluencia.

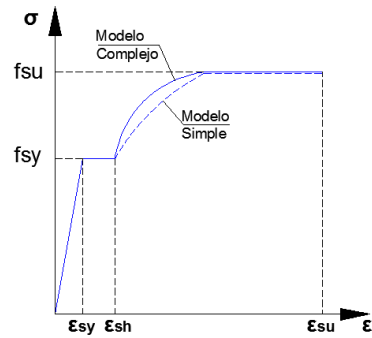


Figura 2. Modelo de Park para el Acero

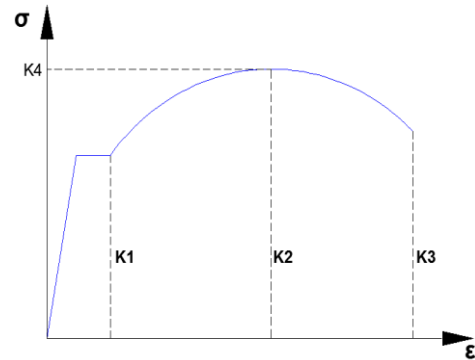


Figura 3. Modelo del utilizado para el Acero

### 3. PUNTOS NOTABLES DEL DIAGRAMA M- $\phi$

**Fluencia:** cuando se produce la primera fluencia en el acero de refuerzo a tracción, es decir cuando la deformación del acero  $\xi_s=0.002$  [9].

**Límite de Servicio en Compresión:** El límite de deformación para el concreto debe ser una estimación conservadora de la deformación cuando inicia el desprendimiento. Una deformación del concreto de  $\xi_c=0.004$  es un límite conservador [9].

**Límite de Servicio en Tensión:** Para elementos estructurales que soportan cargas axiales una deformación máxima del acero  $\xi_s=0.015$  [9].

**Control de Daño en Compresión:** Cuando se produce la fractura del refuerzo transversal de confinamiento del núcleo de concreto [8,9],

$$\xi_c = 0.004 + 1.4 \frac{p_v * f_{yh} * \xi_{su}}{f'_{cc}} \tag{2}$$

Donde  $p_v$  es la cuantía volumétrica del refuerzo transversal,  $f_{yh}$  es el límite de fluencia del acero transversal (MPa),  $\xi_{su}$  es la deformación última del acero, y  $f'_{cc}$  es el esfuerzo de compresión del concreto confinado (MPa).

**Control de Daño en Tensión:** Se produce cuando el acero longitudinal empieza a pandearse, la curvatura de la sección analizada debe basarse en una deformación del acero de  $\xi_s=0.6\xi_{su}$  [8].

**Límite de Deformación Último:** Se produce cuando la sección ya no es capaz de soportar carga gravitacional, se disminuye su resistencia en más del 20% de la máxima resistencia lograda. Ocurre cuando el acero llega a una deformación de  $\xi_{su}=0.10$  a  $0.12$ , aunque puede ser menor [9].

#### 4. IDEALIZACIÓN BI-LINEAL

Se pueden obtener resultados lo suficientemente exactos utilizando un diagrama bi-lineal, que consiste en una recta inicial “elástica” y una recta post-fluencia “plástica”. La primera recta que define la rigidez elástica, debe ser unida desde el punto cero pasando por el punto de fluencia (denotado por la curvatura y momento de fluencia  $\phi_y, M_y$ ), hasta el punto de un momento nominal  $M_n$  y una curvatura nominal de fluencia  $\phi_y. M_n$  se determina a una deformación compresión de  $\xi_c=0.004$  o una deformación de tensión de  $\xi_s=0.015$ , lo que ocurra primero [9]. La curvatura nominal de fluencia debe ser calculada con la expresión:

$$\phi_y = \frac{M_n}{M_y} \phi_y' \quad (3)$$

La segunda recta se la obtiene uniendo el punto nominal denotado por  $(\phi_y, M_n)$  con el punto de momento y curvatura últimos  $(\phi_u, M_u)$ . Las curvaturas se expresan en ( $m^{-1}$ ) y los momentos en (KNw\*m).

#### 5. DUCTILIDAD POR CURVATURA

La ductilidad es la capacidad que tiene un elemento de sufrir grandes deformaciones bajo cargas cercanas a la falla. Si un elemento posee poca capacidad de ductilidad de curvatura, lo más probable es que presente agotamiento de tipo frágil cuando la estructura ingrese al rango no lineal. La ductilidad se la calcula para cada uno de los límites de deformación:

$$\mu = \frac{\phi}{\phi_y} \quad (4)$$

#### 6. INCORPORACIÓN DE LOS EFECTOS POR CORTE

La Capacidad de una sección debe ser analizada incorporando al diagrama Momento-Curvatura, la capacidad a Momento Cortante obtenida a partir de la fuerza de corte que proveen tanto el hormigón confinado como el acero de refuerzo transversal. El Momento Cortante  $MV$  (MNw\*m) es igual a la fuerza de corte que es capaz de resistir un elemento de hormigón armado  $V$  (KNw), multiplicado por longitud al punto de inflexión del diagrama de momentos para el caso sísmico  $L_c$  (m).

$$MV = V * L_c \quad (5)$$

##### 6.1 Capacidad a Corte proporcionada por el Hormigón

La CALTRANS [3] plantea una ecuación que considera la degradación de la resistencia a corte del hormigón, provocada por la creciente demanda de ductilidad la cual funciona correctamente tanto para secciones circulares como para secciones rectangulares. De acuerdo con CALTRANS la

fuerza a corte proporcionada por el hormigón  $V_c$  (KNw) se calcula para cada uno de los límites de deformación y están dadas por las ecuaciones:

$$V_c = F1 * F2 * \sqrt{f'_c} * 0.8A_g \leq 0.33\sqrt{f'_c} * A_g \quad (6)$$

$$F1 = 0.025 \leq \frac{p_v * f_y h}{12.5} + 0.305 - 0.083\mu_{\Delta} \leq 0.25 \quad (7)$$

$$F2 = 1 + \frac{P}{13.8 * A_g} \leq 1.50 \quad (8)$$

Donde  $F1$  es el parámetro que considera la degradación de la resistencia debido a la ductilidad,  $F2$  es un parámetro que incluye la carga axial en el caso de las columnas,  $f'_c$  es el esfuerzo del hormigón no confinado (MPa),  $A_g$  es el área bruta de la sección ( $m^2$ ),  $\mu_{\Delta}$  es la ductilidad por desplazamiento correspondiente al límite de deformación en análisis ( $m^{-1}$ ), y  $P$  es la carga axial aplicada en (MNw).

##### 6.2 Capacidad a Corte proporcionada por el Acero

La resistencia proporcionada por el refuerzo transversal  $V_s$  (MNw) de acuerdo al ACI 318-08 [1], cuando se utilice armadura perpendicular al eje del elemento está dada por:

$$V_s = \frac{A_v * f_y h * d}{s} \quad (9)$$

Donde  $A_v$  ( $m^2$ ) es el área de acero de corte dentro de una distancia  $s$  (m), y  $d$  (m) es el peralte efectivo de la sección.

Finalmente la capacidad a corte de la sección  $V$  (MNw) es igual a la suma de la capacidad a corte proporcionada por el hormigón más la capacidad proporcionada por el acero:

$$V = V_c + V_s \quad (10)$$

Es recomendable que se trabaje  $V$  en (KNw), por lo que es necesario transformar la unidad.

#### 7. DIAGRAMA DE CAPACIDAD DE LA SECCIÓN A FLEXIÓN Y CORTE

Finalmente la capacidad a flexión y a corte real, de la sección trabajando en zona inelástica se la puede expresar mediante los diagramas Momento - Curvatura (Bi - Lineal) y Momento Cortante - Curvatura Plástica.

Si los dos diagramas se llegaran a cortar en algún punto, quiere decir que el agotamiento que se va a producir en el elemento es por cortante, por lo tanto es de tipo frágil. Este tipo de agotamiento no es recomendable pues produce una falla explosiva y catastrófica; y si mediante el análisis del Diagrama Momento - Curvatura se determina que ocurrirá una falla frágil, es recomendable rediseñar el elemento a criterio del calculista.

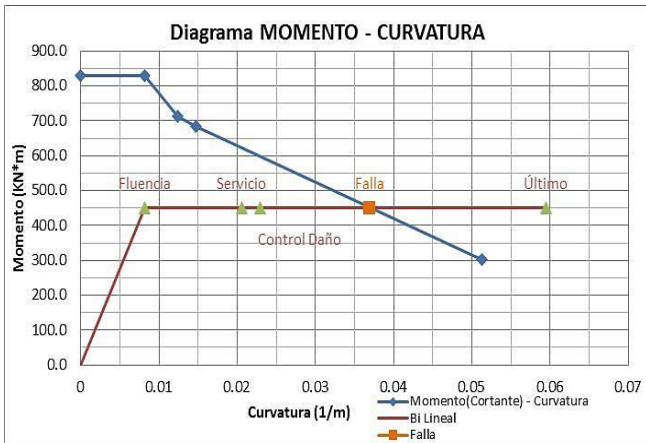


Figura 4. Agotamiento por Cortante

Por el contrario si ambos diagramas no presentan un punto de corte, la falla que el elemento presentará será por flexión, lo cual es lo más deseable pues es una falla que previene, para que puedan tomarse acciones correctivas antes de que el elemento colapse totalmente.

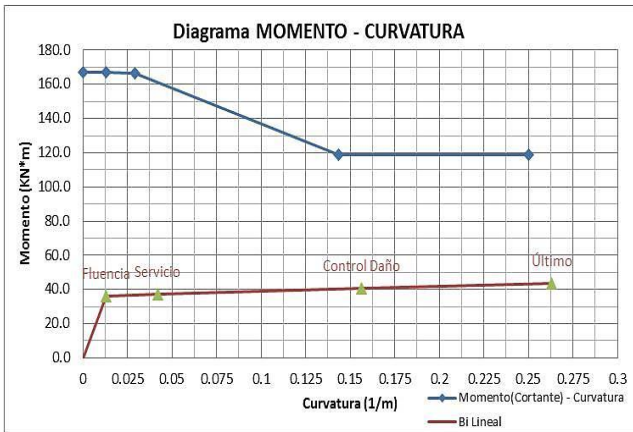


Figura 5. Agotamiento por Flexión

### 8. INFLUENCIA DEL ÁREA DE ACERO LONGITUDINAL EN LA DUCTILIDAD DE UN ELEMENTO TRABAJANDO A FLEXO – COMPRESIÓN

Para determinar la influencia del acero longitudinal en la ductilidad de un elemento trabajando a flexo-compresión se utilizó una sección hipotética cuyas propiedades se describen a continuación, en la cual se varía el porcentaje de acero del 1% al 3%. El resto de variables son constantes.

$$f_c = 20.601 \text{ MPa} \quad f_y = 412.02 \text{ MPa} \quad b = 0.50 \text{ m} \\ h = 0.50 \text{ m} \quad \rho = 1\% - 5\% \quad P = 1 \text{ MN}$$

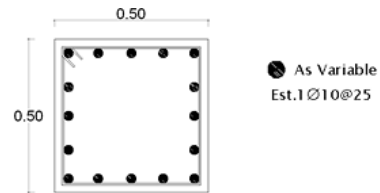


Figura 6. Sección a analizar

#### 8.1 Sección Armada con 1% (16Ø14mm)

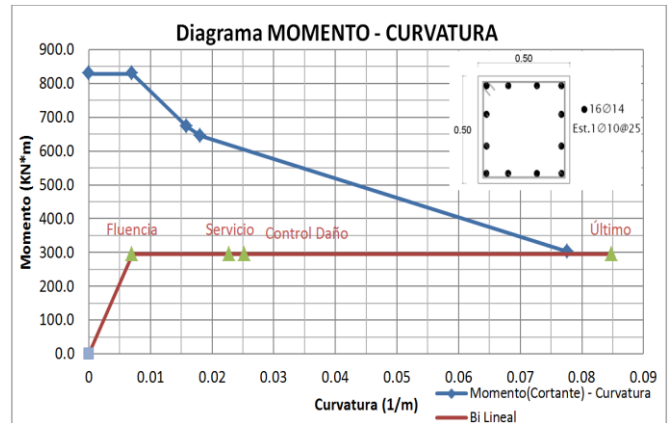


Figura 7. Sección Armada con el 1%

De acuerdo al análisis, la sección presenta un agotamiento dúctil, dado que la capacidad a corte de la columna es mayor a la capacidad a flexión para todos los puntos de control, lo cual garantiza un diseño sismo-resistente óptimo.

Los datos de mayor relevancia de este diagrama están dados por la curvatura de fluencia de la sección  $\phi_y = 0.007048 \text{ m}^{-1}$  y la curvatura última  $\phi_u = 0.084693 \text{ m}^{-1}$ . Es así que se obtiene una ductilidad máxima de la sección de  $\mu_{\phi_u} = 12.01$ .

#### 8.2 Sección Armada con el 2% (16Ø20mm)

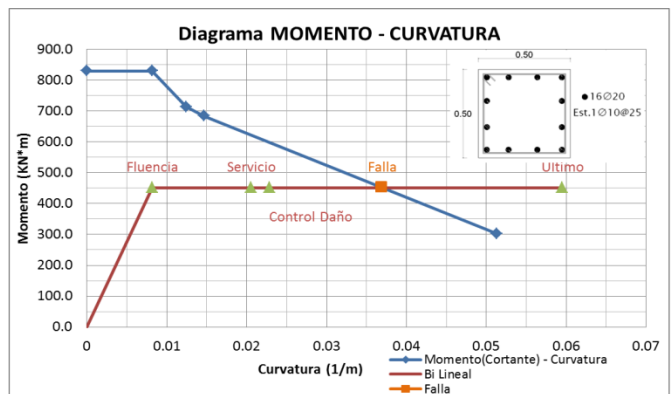


Figura 8. Sección Armada con el 2%

Al subir el porcentaje de acero al doble, si bien aumenta la capacidad de la sección en gran magnitud, la ductilidad se reduce a  $\mu_{\phi_u} = 7.26$ , dando como resultado agotamiento frágil, es decir la capacidad a corte de la sección es menor a la capacidad de fluencia. Si bien la falla se produce cerca del

punto último (colapso) de la sección, este mecanismo de falla es críticamente peligroso y se debe evitar a toda costa para garantizar un desempeño inelástico correcto de la sección.

### 8.3 Sección Armada con 3% (20φ22mm)

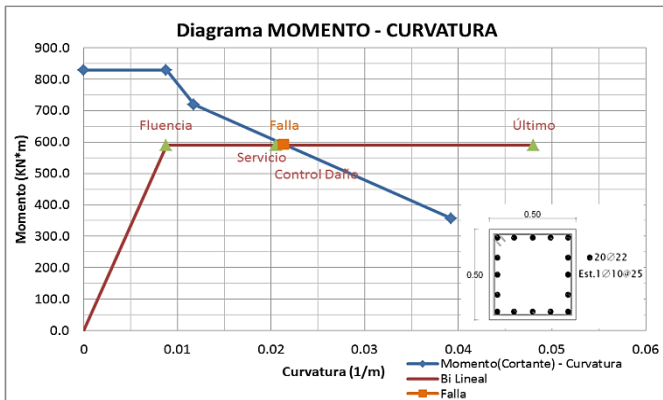


Figura 9. Sección Armada con el 3%

Finalmente para este estudio se evaluó la capacidad de la sección con el 3% de acero longitudinal, porcentaje que es tomado por la mayoría de los códigos de diseño como el máximo admisible para secciones a flexo-compresión.

Se puede apreciar claramente cómo la ductilidad de la sección disminuye ( $\mu\phi_u = 5.45$ ) hasta llegar al punto de Servicio, además de producirse un agotamiento por corte de la sección. Es necesario recalcar entonces, que para que sea viable la utilización de porcentajes altos de acero longitudinal, es necesario que se le dote a la sección de una gran capacidad a corte, lo cual se demuestra en el siguiente capítulo del presente artículo.

## 9. INFLUENCIA DEL ÁREA DE ACERO TRANSVERSAL EN LA DUCTILIDAD DE UN ELEMENTO TRABAJANDO A FLEXO - COMPRESIÓN

Para la realización de este estudio se tomó una sección hipotética cuyas características se describen a continuación, en la cual se varía la cuantía de acero transversal. El resto de variables son constantes.

$$f_c = 20.601 \text{ MPa} \quad f_y = 412.02 \text{ MPa} \quad b = 0.50 \text{ m}$$

$$h = 0.50 \text{ m} \quad d = 0.47 \text{ m} \quad p = 3\% \quad (20\phi 22 \text{ mm}) \quad P = 1 \text{ MNw}$$

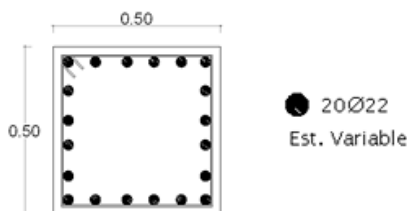


Figura 10. Sección a analizar

### 9.1 Sección Armada con E2Ø10mm@25cm (2 RAMALES)

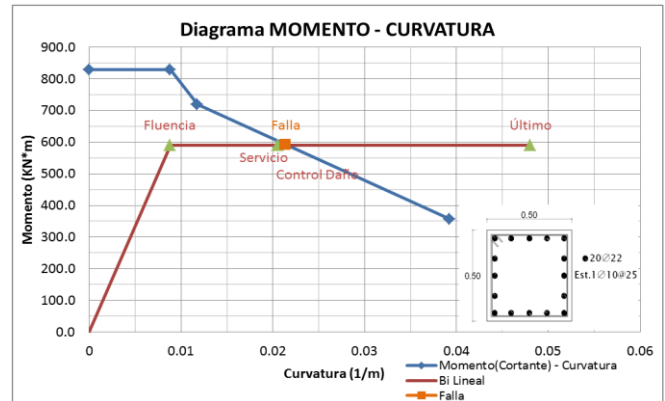


Figura 11. Sección Armada con E1Ø10mm@25cm

Se inicia con la última sección utilizada en el estudio anterior, con la finalidad de ir dotándole de capacidad a corte, y demostrar que el acero transversal es el principal colaborador a la ductilidad de la sección.

En resumen, se produce un agotamiento frágil cercano al punto de Servicio, alcanzando una ductilidad última de  $\mu\phi_u = 5.45$ . Además, en este análisis es necesario anotar que el momento de fluencia de la sección es de 590 KN\*m.

### 9.2 Sección Armada con E2Ø10mm@25cm (4 RAMALES)

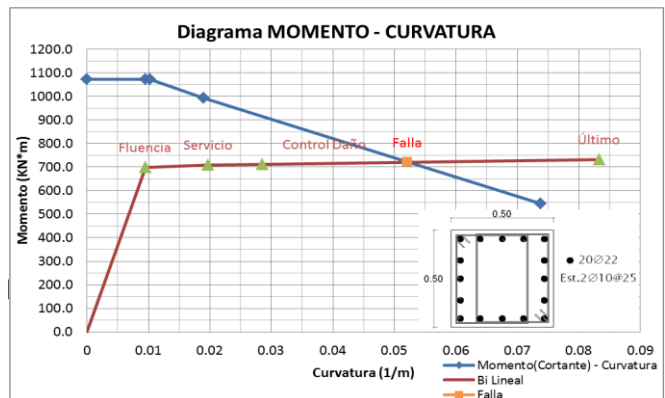


Figura 12. Sección Armada con 2E1Ø10mm@25cm

Para el siguiente caso de estudio, se dota a la sección de un estribo adicional ubicado al mismo espaciamiento que para el caso anterior, de esta manera se tienen cuatro ramales que colaboran a corte.

De igual manera, el agotamiento se produce por corte, solo que en esta ocasión el punto de falla se encuentra cerca del punto de colapso del elemento. La ductilidad se ha incrementado a  $\mu\phi_u = 8.79$ .

Adicionalmente, si bien no se ha aumentado el acero longitudinal, el cual es el responsable de la capacidad a momento flector de la sección; el momento de fluencia también incrementa a 690 KN\*m. Esto se debe a que al utilizar el modelo de Mander para el concreto, y teniendo

mayor confinamiento, la resistencia del mismo aumenta del inicial  $f'c = 20.601\text{MPa}$  a  $f'cc = 23.879\text{MPa}$ .

### 9.3 Sección Armada con $E2\phi 10\text{mm}@15\text{cm}$ (4 RAMALES)

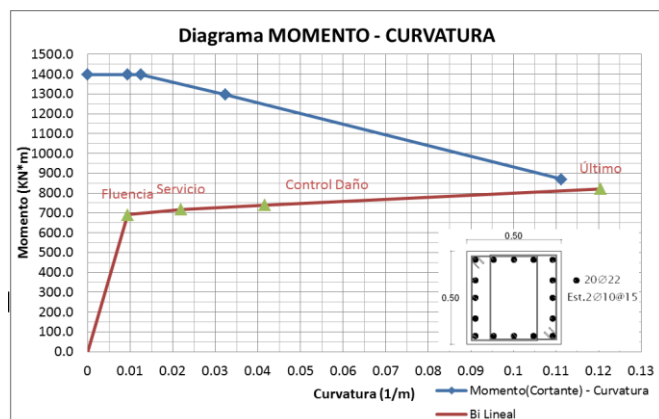


Figura 13. Sección Armada con  $2E1\phi 10\text{mm}@15\text{cm}$

Finalmente, utilizando el mismo número de estribos, se reduce el espaciamiento de los mismos de  $25\text{cm}$  a  $15\text{cm}$ , y se logra que el agotamiento de la sección sea dúctil, alcanzando la sección una ductilidad última de  $\mu\phi u = 12.88$ , casi 2.5 veces más que la sección inicial. Así mismo, el momento de fluencia que se obtiene es de  $699\text{KN}\cdot\text{m}$ , un 19% más que el de la sección inicial.

## 10. CONCLUSIONES

### 10.1 Influencia del acero longitudinal

Si bien con el aumento del porcentaje del acero el momento resistente máximo de la sección aumenta considerablemente, mientras más acero tenga una sección menor va a ser la capacidad del hormigón de deformarse plásticamente y en consecuencia disminuye en gran cantidad la ductilidad del elemento.

Manteniendo el mismo refuerzo a cortante, cuando aumenta el porcentaje de acero en una sección la falla se produce cada vez más cerca del punto de fluencia, por lo tanto, en el caso de que se utilicen porcentajes altos de acero en una sección, necesariamente debe aumentarse el refuerzo transversal con el fin de que se garantice un agotamiento por flexión, o en el peor de los casos si es por corte, que esta se produzca muy cerca del estado límite último.

El empalme de las barras de acero en secciones consideradas como críticas, debe realizarse a través de conectores de unión punta a punta, o mediante otro sistema que garantice la continuidad de la barra sin que se duplique el área de acero, pues en este punto se reduce la ductilidad de la sección en gran magnitud.

### 10.2 Influencia del acero transversal

Se ha demostrado que el acero de refuerzo transversal también contribuye a brindar mayor capacidad a momento

flector de la sección, lo cual comúnmente no se considera, en el diseño.

Los estribos no solamente contribuyen al refuerzo por corte, sino que proporcionan mayor ductilidad a la sección permitiendo un mejor desempeño sísmico del elemento.

Las secciones con alto porcentaje de acero tienden a necesitar mayor refuerzo transversal, por lo tanto es muy probable que una sección con alto porcentaje de acero presente una falla de tipo frágil, lo cual se puede evitar si se le proporciona un confinamiento adecuado.

## 11. REFERENCIAS

- [1] ACI 318, "Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-08) y Comentario". American Concrete Institute, Estados Unidos. 2008
- [2] Aguiar R. "Análisis sísmico por Desempeño". Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército. Quito, Ecuador. 2003, pp 1-106.
- [3] CALTRANS (2004). "Seismic Design Criteria". California Department of Transportation, Sacramento, California, Estados Unidos. 2004
- [4] Celi C., Arellano B. "Fiabilidad del Modelamiento Sísmico, en el Rango No Lineal, en Función de la Longitud de las Zonas Plásticas Asumidas Para Vigas". Revista Politécnica, Escuela Politécnica Nacional. Quito-Ecuador. 2014
- [5] Gil Espert, L. "Análisis de sensibilidad con comportamiento no lineal del material y su aplicación en el diseño asistido de estructuras". Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Catalunya. Barcelona, España. 1997.
- [6] Mander J. B., Priestley, M. J. N., and Paulay, R. "Observed Stress-Strain Behaviour of Confined Concrete." Jornadas de Ingeniería Estructural, ASCE Vol. 114, No. 8, Agosto 1988, pp 1827-1849.
- [7] Medina, C.. "Estudio de la relación Momento - Curvatura como herramienta para entender el comportamiento de secciones de hormigón armado". Tesis de Pregrado. Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Técnica de Ambato. Ambato, Ecuador. 2012
- [8] Paulay, T, Priestley, M. J. N. "Seismic Design of Concrete and Masonry Buildings". John Wiley & Sons Inc. Nueva York, Estados Unidos. 1992, pp 63-151
- [9] Priestley, M. J. N., Calvi, G. M. y Kowalsky, M. J. "Displacement-Based Seismic Design of Structures". Fondazione EUCENTRE. Pavia. Italia. 2007, pp 95-104