# Índices $N$ y $N_+$ para el polítopo de conjuntos estables asociado a ciertas familias de antiwebs

Montenegro M. Torres L. M.

*Departamento de Matemática*

mary_sioque@hotmail.com, luis.torres@epn.edu.ec

**Resumen**

En el presente artículo, revisamos los operadores $N$ y $N_+$ de levantamiento y proyección (*lift-and-project*) definidos por Lovász y Schrijver [3], así como su aplicación al polítopo de conjuntos estables de un grafo. Posteriormente, estudiamos las propiedades de los índices $N$ y $N_+$ asociados a estos operadores sobre la clase particular de grafos de las antiwebs. Demostramos que el índice $N_+$ de cualquier antiweb es igual 1, y presentamos un esquema constructivo que permite acotar el valor del índice $N$ para ciertas familias de antiwebs.

***Palabras claves***: polítopo de conjuntos estables, procedimiento "lift–and–project", índices $N$ y $N_+$, antiwebs

**Abstract**

We review the *lift-and-project* $N$ and $N_+$ operators defined by Lovász and Schrijver [3], as well as their application to the stable set polytope of a graph. We study the properties of the related $N$ and $N_+$ indices on the particular graph class of antiwebs. We show that the $N_+$ index related to an antiweb is equal to 1, and we propose a constructive scheme to bound from above the $N$ index related to certain families of antiwebs.

***Keywords***: stable set polytope, lift-and-project, $N$ and $N_+$ operators, antiwebs

## 1 Los operadores $N$ y $N_+$

Un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ es la intersección finita de semiespacios cerrados. Un *polítopo* es un poliedro acotado, y un resultado fundamental de la teoría poliedral establece que todo polítopo es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos.

Dado un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos al poliedro entero asociado $P_I$ como la envolvente convexa de los puntos en $P$ con coordenadas enteras. Es decir, $P_I := \mathrm{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$.

Todo polítopo $P \subseteq [0,1]^n$ puede ser asociado a un cono en $\mathbb{R}^{n+1}$, mediante una transformación conocida como homogeneización. Básicamente, la misma consiste en considerar la inmersión de $P$ en el hiperplano $H := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 = 1\}$ y, a partir de esta inmersión, generar un cono convexo. Al homogeneizar el polítopo

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b, \, 0 \leq x \leq \mathbb{1}\},$$

se obtiene el cono

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : \, bx_0 - Ax \geq 0, \; x \geq 0, \; x_0\mathbb{1} - x \geq 0 \right\}.$$

Se dice que una desigualdad lineal es válida para un polítopo $P$ si la misma se cumple para todo $x \in P$. Toda desigualdad $\alpha^T x \leq \beta$ válida para el polítopo $P$ puede escribirse como la desigualdad $\beta x_0 - \alpha^T x \geq 0$ válida para el cono $K$, y se conoce como *desigualdad homogeneizada de* $\alpha^T x \leq \beta$. Notaremos por $\hat{\alpha}^T = (\beta, -\alpha^T)$ al vector de incidencia asociado a esta desigualdad.

Observar que es posible escribir $K$ como la intersección de un número finito de semiespacios definidos por restricciones lineales de la forma $\hat{\alpha}^T x \geq 0$ con $\hat{\alpha}^T = (\beta, -\alpha^T)$ y $x \in \mathbb{R}^{n+1}$; por lo tanto, $K$ es un cono poliedral.

Llamaremos $Q$ al cono poliedral en $\mathbb{R}^{n+1}$ que resulta de la homogeneización del polítopo $[0,1]^n$; es decir,

$$Q = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n)^T : \; x_0 - x_i \geq 0, \; x_i \geq 0, \; \forall\, 1 \leq i \leq n\}.$$

Notar que $Q$ está descrito por las siguientes $2n$ desigualdades lineales:

$$x_i = e_i^T x \geq 0 \quad \text{y} \quad x_0 - x_i = (e_0 - e_i)^T x = f_i^T x \geq 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

donde $e_i$ son los vectores unitarios canónicos de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $f_i := e_0 - e_i$, para $i = 1, \ldots, n$.

$Q$ puede entenderse, de manera equivalente, como el cono convexo generado por todos los vectores $x \in \{0,1\}^{n+1}$ con $x_0 = 1$.

A lo largo de esta sección, consideraremos un cono convexo $K \subseteq Q$, y notaremos por $K_I$ al cono generado por todos los vectores en $K$ que tienen coordenadas iguales a 0 ó 1.

Sea $K$ un cono convexo en $\mathbb{R}^{n+1}$. El cono polar de $K$, denotado por $K^*$, es el cono convexo definido por

$$K^* := \{u \in \mathbb{R}^{n+1} : u^T x \geq 0, \ \forall x \in K\}.$$

Observar que si $u \in K^*$, entonces la desigualdad lineal $u^T x \geq 0$ es válida para $K$. En otras palabras, $K^*$ está formado por los vectores normales de todas las desigualdades válidas para $K$.

El cono polar de $Q$ está generado por los vectores $e_i$ y $f_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Estos vectores corresponden a los vectores normales de las desigualdades (1) que definen $Q$:

$$Q^* = \text{cone}\{e_i, f_i : i = 1, \ldots, n\}.$$

Lovász y Schrijver [3] introducen el método "levantar y proyectar" para ajustar la relajación fraccionaria de un cono entero contenido en $Q$. Revisaremos a continuación los aspectos fundamentales del mismo.

**Definición 1** ([3]). *Sean $K_1$, $K_2 \subseteq Q$ dos conos convexos en $\mathbb{R}^{n+1}$. Se define $M(K_1, K_2)$ como el cono de las matrices $Y = (y_{ij})$ que pertenecen a $\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ tales que:*

- $(i)$ *$Y$ es simétrica;*
- $(ii)$ $\text{diag}(Y) = Ye_0$*; es decir, $y_{ii} = y_{0i}$ para todo $1 \leq i \leq n$;*
- $(iii)$ $u^T Y v \geq 0$ *para todo $u \in K_1^*$ y $v \in K_2^*$.*

*De manera similar, $M_+(K_1, K_2)$ es el cono de las matrices que, a más de las condiciones anteriores, satisfacen*

- $(iv)$ *$Y$ es semi–definida positiva; es decir, $u^T Y u \geq 0$, para todo $u \in \mathbb{R}^{n+1}$.*

**Lema 1** ([4]). *Sean $K_1$, $K_2 \subseteq Q$ dos conos convexos, $x$ un vector de coordenadas 0 ó 1 en $K_1 \cap K_2$, con $x_0 = 1$, y $Y = xx^T$. Entonces $Y$ es una matriz en $\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ que satisface $(i)$–$(iv)$ de la definición anterior.*

Los conos $M(K_1, K_2)$ y $M_+(K_1, K_2)$ se conocen como *levantamientos* de $K_1$ y $K_2$. Nos interesan, además, sus proyecciones sobre $\mathbb{R}^{n+1}$, definidas por:

$$N(K_1, K_2) := \{Ye_0 : Y \in M(K_1, K_2)\},$$

$$N_+(K_1, K_2) := \{Ye_0 : Y \in M_+(K_1, K_2)\}.$$

Al procedimiento de obtener $N(K_1, K_2)$ ó $N_+(K_1, K_2)$ a partir de $K_1$ y $K_2$ se lo llama "levantar y proyectar" (*lift–and–project*). El siguiente resultado, motivado por el lema 1, explica su utilidad.

**Lema 2** ([3]). $(K_1 \cap K_2)_I \subseteq N_+(K_1, K_2) \subseteq N(K_1, K_2) \subseteq K_1 \cap K_2$.

Dos casos particulares que merecen especial atención se presentan cuando $K_1 = K_2 = K$; y $K_1 = K$, $K_2 = Q$. En lo posterior, nos restringiremos al estudio del segundo caso, y definimos los operadores de levantamiento y proyección $N$ y $N_+$ por medio de:

$$N(K) := N(K, Q),$$
$$N_+(K) := N_+(K, Q),$$

para cualquier $K \subseteq Q$. Notar que, a partir del lema 2, se tiene que

$$K_I \subseteq N_+(K) \subseteq N(K) \subseteq K.$$

De esta manera, al aplicar los operadores $N$ y $N_+$, se ajusta una relajación lineal del cono entero $K_I$. Para $i \in \mathbb{N}$, denotaremos por $N^{i+1}(K)$ a $N(N^i(K))$, con $N^1(K) := N(K)$. Uno de los resultados principales de Lovász y Schrijver establece que es suficiente aplicar $n$ veces el operador $N$ a un cono convexo $K$ para obtener el cono entero $K_I$.

**Teorema 3** ([3]). *Sea $K \subseteq Q$ un cono convexo en $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces $N^n(K) = K_I$.*

Más adelante, requeriremos la siguiente propiedad del operador $N$.

**Lema 4** ([4]). *Sean $K \subseteq Q$ un cono en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $w \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces $w \in N(K)^*$ si y solo si $we_0^T \in M(K)^*$.*

Se define el índice $N$ de un cono $K$ como el menor $t \in \mathbb{N}$ tal que $N^t(K) = K_I$. Por el Teorema 3, el índice $N$ de cualquier cono $K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es menor o igual a $n$. De la misma manera, se define el índice $N$ de una desigualdad válida para $K_I$ como el menor $t \in \mathbb{N}$ tal que esta desigualdad sea válida para $N^t(K)$. El índice $N_+$ se define de forma similar.

Es posible trasladar las construcciones anteriores al espacio original $\mathbb{R}^n$, sin homogeneización: si $K$ es el cono que resulta de homogeneizar el polítopo $P$ contenido en $[0,1]^n$, se define

$$N(P) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in N(K) \right\}.$$

De forma semejante se define el conjunto $N_+(P)$.

En la aplicación práctica del método, son de gran importancia las expresiones para los polares $M^*(K_1, K_2)$ y $M_+^*(K_1, K_2)$ que presentamos a continuación.

Denotaremos por $U_{\text{sym}}$ al espacio de las matrices simétricas y por $U_{\text{skew}}$ al espacio de las matrices antisimétricas en $\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$.

La condición $(ii)$ de la definición 1 puede ser escrita usando el producto escalar de matrices en la forma $\left\langle f_i e_i^T, Y \right\rangle = 0$. Se define, entonces:

$$U := \{Y \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} : \left\langle f_i e_i^T, Y \right\rangle = 0, \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

Se denota, además, por $U_1$ el espacio lineal de las matrices $Y$ en $\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ tales que $y_{0j} = -y_{jj}$ para $1 \leq j \leq n$, $y_{00} = 0$, y $y_{ij} = 0$, si $i \neq 0$ e $i \neq j$. Se puede demostrar que $U_1$ está generado por las matrices $f_i e_i^T$ para $i = 1, \ldots, n$.

De manera análoga, el producto $u^T Yv$, en la condición (*iii*) de la definición 1, puede escribirse como $\langle u, Yv\rangle = \langle uv^T, Y\rangle$. Definimos el conjunto

$$V := \left\{ Y \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} : \left\langle uv^T, Y \right\rangle \geq 0,\ \forall u \in K_1^* \wedge \forall v \in K_2^* \right\}.$$

Finalmente, denotaremos por $U_{sdp}$ al cono de las matrices semi–definidas positivas (s.d.p.) en $\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$; es decir:

$$U_{sdp} = \{Y \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} : x^T Y x \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}\}.$$

Empleando la notación introducida arriba, tenemos que:

$$M(K_1, K_2) := U_{\text{sym}} \cap U \cap V,$$

y

$$M_+(K_1, K_2) := U_{\text{sym}} \cap U \cap V \cap U_{sdp}.$$

Se conoce, además, que el polar de una intersección de conjuntos es la suma de los polares de cada conjunto, de donde:

$$\begin{aligned} M^*(K_1, K_2) &= (U_{\text{sym}} \cap U \cap V)^* \\ &= U_{\text{sym}}^* + U^* + V^*, \\ M_+^*(K_1, K_2) &= (U_{\text{sym}} \cap U \cap V \cap U_{sdp})^* \\ &= U_{\text{sym}}^* + U^* + V^* + U_{sdp}^*. \end{aligned}$$

Por último, es posible demostrar [4] que: $U_{\text{sym}}^* = U_{\text{skew}}$, $U^* = U_1$, $V^* = \text{cone}\{uv^T : \ u \in K_1^*, v \in K_2^*\}$ y $U_{\text{sdp}}^* = U_{\text{sdp}}$. Como resultado, se obtiene el siguiente teorema.

**Teorema 5.** *Sean $K_1$, $K_2 \subseteq Q$ dos conos convexos en $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces,*

$$\begin{aligned} M^*(K_1, K_2) &= U_{\text{skew}} + U_1 + V^*, \qquad (2) \\ M_+^*(K_1, K_2) &= U_{\text{skew}} + U_1 + V^* + U_{sdp}. \end{aligned}$$

Utilizaremos este resultado en la sección 3 para caracterizar los conjuntos obtenidos al aplicar el operador $N$ sobre relajaciones fraccionarias del polítopo de conjuntos estables asociado a antiwebs.

## 2 Conjuntos estables

Un *grafo* (no dirigido) $G = (V, E)$ consiste de un conjunto finito de *nodos* $V = V(G)$ y un conjunto finito de *aristas* $E = E(G)$, donde cada arista está formada por un par de nodos que se conocen como extremos. Es decir, los elementos de $E(G)$ son de la forma $\{i, j\}$ donde $i$, $j \in V(G)$. Por simplicidad, es usual denotar $\{i, j\}$ simplemente por $ij$. Se dice que una arista $ij$ es *incidente* a sus nodos extremos $i$, $j$. Un par de nodos $i$, $j \in V$ son *adyacentes* o *vecinos* si $ij \in E$. En adelante, designaremos por $n$ al número de nodos de un grafo.

Un *subgrafo* $G' = (V', G')$ de $G$ es un grafo tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. El subgrafo $G'$ se llama *subgrafo inducido* por $V'$ si $E'$ contiene todas las aristas de $E$ con sus dos extremos en $V'$. Notaremos en este caso $G' \subseteq G$.

El *complemento* de $G$ es el grafo $\overline{G}$ que tiene el mismo conjunto de nodos $V$ y tal que dos nodos son adyacentes en $\overline{G}$ si y solo si no son adyacentes en $G$.

Para $A \subseteq E$, $G \setminus A$ denota el subgrafo $G' = (V', E')$ obtenido mediante la *eliminación de A*, esto es, $V' = V$ y $E' = E \setminus A$. De manera similar, si $B \subseteq V$, el grafo $G \setminus B$ es el grafo inducido por $V \setminus B$. Es decir, la eliminación de un conjunto $B$ de nodos consiste en eliminar de $V$ los elementos de $B$ y eliminar de $E$ las aristas incidentes a nodos en $B$. Para $i \in V$, el grafo obtenido tras la eliminación de $\{i\}$ se escribirá simplemente como $G \setminus i$. La *contracción* de un nodo $i \in V$ consiste en la eliminación del conjunto $\{i\} \cup \Gamma(i)$. Notaremos al grafo resultante por $G/i$.

**Definición 2.** *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Un conjunto estable en $G$ es un conjunto $S \subseteq V$ de nodos mutuamente no adyacentes; es decir, un conjunto de nodos tal que si*

$$i, j \in S \Rightarrow ij \notin E.$$

*El número de estabilidad de $G$ es la máxima cardinalidad de un conjunto estable en $G$ y se denota por $\alpha(G)$.*

Un *grafo bipartito* es un grafo cuyo conjunto de nodos puede particionarse en dos conjuntos estables $V_1$ y $V_2$.

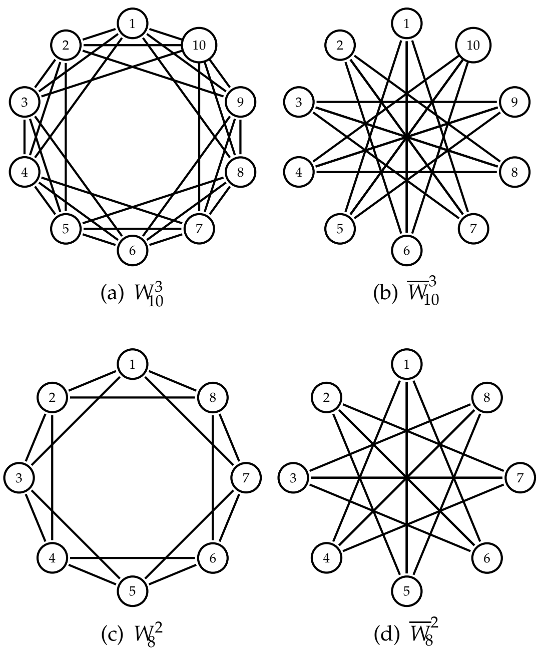
Un grafo es completo cuando cada par de vértices está conectado por una arista. Una *clique* es un subgrafo inducido completo; es decir, es el complemento de un conjunto estable. Notaremos por $Q_n$ a una clique inducida por $n$ nodos, y diremos, en este caso, que la clique tiene tamaño $n$. El máximo tamaño de una clique en un grafo $G$ se conoce como *número de clique* y se denota por $\omega(G)$.

Un *ciclo impar* es un subgrafo inducido por un conjunto de $2k+1$ nodos $\{1, \ldots, 2k+1\}$, con $k \in \mathbb{N}$, y que contiene todas las aristas de la forma $\{i, i+1\}$ para $i = 1, \ldots, 2k+1$, con la suma tomada módulo $2k+1$. Cualquier otra arista que no sea de la forma $\{i, i+1\}$ se conoce como *cuerda*. Un ciclo impar sin cuerdas es un *agujero impar*. Denotaremos por $C_{2k+1}$ a un agujero de tamaño $2k+1$. Un *antiagujero* impar $\overline{C}_{2k+1}$ es el complemento de $C_{2k+1}$. Agujeros y antiagujeros impares son casos particulares de dos clases de grafos conocidos como webs y antiwebs.

**Definición 3** ([5]). *Una web $W_n^k$ es un grafo con conjunto de nodos $\{1, \ldots, n\}$ y un conjunto de aristas dado por $E(W_n^k) := \{i, i \pm l : i \in V, 1 \leq l \leq k\}$, donde la suma y resta de los elementos de $V$ se definen módulo $n$.*

**Definición 4** ([5]). *Una antiweb $\overline{W_n^k}$ es el complemento de una web $W_n^k$.*

Las antiwebs generalizan varias otras clases de grafos conocidas. Algunos ejemplos particulares de antiwebs son las cliques $Q_n = \overline{W}_n^0$, los antiagujeros $\overline{C}_n = \overline{W}_n^1$ y los agujeros impares $C_{2k+1} = \overline{W}_{2k+1}^{k-1}$. En la figura 1, se muestran otros ejemplos de webs y antiwebs. Asumiremos en adelante, al referirnos a webs y antiwebs, que $n \geq 2k+1$, puesto que de, lo contrario, toda web degenera en un grafo completo y toda antiweb en un grafo sin aristas.



(a) $W_{10}^3$ (b) $\overline{W}_{10}^3$

(c) $W_8^2$ (d) $\overline{W}_8^2$

**Figura 1.** Ejemplos de webs y antiwebs.

Decimos que una antiweb es *prima* cuando $n$ y $k$ son números relativamente primos; es decir, si el máximo común divisor de $n$ y $k$ es 1.

Dados un grafo $G = (V, E)$ y $w \in \mathbb{R}^V$, el problema del conjunto estable de peso máximo consiste en encontrar un subconjunto $S \subseteq V$ que sea un conjunto estable y tal que su peso $w(S) := \sum_{i \in S} w_i$ sea máximo. Si definimos variables binarias $x_i$ para $i \in V$, con $x_i = 1$ si y solo si $i \in S$, este problema puede formularse como el siguiente programa lineal entero:

$$(\mathrm{MAXSTAB}(G)) \begin{cases} \text{máx} \sum_{i=1}^n w_i x_i \\ \text{sujeto a:} \\ x_i + x_j \leq 1, & \forall ij \in E, \\ x_i \in \{0,1\}, & \forall i \in V. \end{cases}$$

El *polítopo de conjuntos estables* asociado a un grafo $G = (V, E)$ es la envolvente convexa de los vectores de incidencia de conjuntos estables de $G$, y se denota por $\mathrm{STAB}(G)$:

$$\mathrm{STAB}(G) := \mathrm{conv}\{\chi^S : S \subseteq V \text{es un conjunto estable}\},$$

donde $\chi^S \in \mathbb{R}^n$ denota el vector de incidencia del conjunto $S \subseteq V$; es decir,

$$\chi_i^S = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in S, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

El polítopo correspondiente a la relajación lineal de $\mathrm{MAXSTAB}(G)$,

$$(\mathrm{MAXESTAB}(G)) \begin{cases} \text{máx} \sum_{i=1}^n w_i x_i \\ \text{sujeto a:} \\ x_i + x_j \leq 1, & \forall ij \in E, \\ x_i \in [0,1], & \forall i \in V, \end{cases}$$

se conoce como la *relajación de aristas* del polítopo de conjuntos estables y se denota por

$$\mathrm{ESTAB}(G) := \{x \in \mathbb{R}_+^V : x_i + x_j \leq 1 \ \forall\, ij \in E\}.$$

Evidentemente, $\mathrm{STAB}(G) \subseteq \mathrm{ESTAB}(G)$, y se conoce que los polítopos son iguales si y solo si $G$ es un grafo bipartito.

Para un subgrafo inducido $G' \subseteq G$, se define

$$\sum_{i \in V(G')} x_i \leq \alpha(G') \tag{3}$$

como la *desigualdad de rango* asociada a $G' \subseteq G$. Es trivial verificar que (3) es válida para $\mathrm{STAB}(G)$, pues cualquier conjunto estable de $G$ restringido a los nodos de $G'$ es un conjunto estable para $G'$.

Si $G'$ pertenece a una clase de grafos específica, la desigualdad de rango asociada tomará el nombre de la clase. Por ejemplo, la desigualdad de rango asociada a una clique se conoce como desigualdad de clique. De la misma forma, se definen las desigualdades de arista, agujero, antiagujero, web y antiweb.

Lovász y Schrijver [3] estudiaron la aplicación de los operadores $N$ y $N_+$ a $\mathrm{ESTAB}(G)$, y establecieron cotas inferiores y superiores para los índices $N$ y $N_+$ para este polítopo.

Para aplicar el operador $N$ y los demás operadores, es necesario homogeneizar el problema a través de la inmersión del polítopo en el hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Se denota por $\mathrm{ST}(G) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ al cono poliedral obtenido al homogeneizar el polítopo $\mathrm{STAB}(G) \subset \mathbb{R}^n$. Notar que

$$\mathrm{ST}(G) = \mathrm{cone}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \chi^S \end{pmatrix} : S \text{ es un conjunto estable} \right\},$$

y

$$\mathrm{STAB}(G) \cong \mathrm{ST}(G) \cap H.$$

De manera similar, $\mathrm{EST}(G) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ denota el cono obtenido por la homogeneización del polítopo $\mathrm{ESTAB}(G)$. Observar que $\mathrm{EST}(G)$ está determinado por el siguiente sistema de desigualdades homogéneo:

$$\begin{aligned} x_i &\geq 0, \quad \forall i \in V, \\ x_0 - x_i - x_j &\geq 0, \quad \forall ij \in E. \end{aligned}$$

Se tiene, además, que $\mathrm{EST}(G) \subseteq Q$ y $\mathrm{EST}(G)_I = \mathrm{ST}(G)$.

Por el lema 2,

$$\begin{aligned}\mathrm{ST}(G) = \mathrm{EST}(G)_I &\subseteq N_+(\mathrm{EST}(G)) \\ &\subseteq N(\mathrm{EST}(G)) \subseteq \mathrm{EST}(G).\end{aligned}$$

Regresando al espacio original $\mathbb{R}^n$, $N(\mathrm{ESTAB}(G)) \cong N(\mathrm{EST}(G)) \cap H$. En adelante, escribiremos simplemente $N(G)$ para referirnos a $N(\mathrm{ESTAB}(G))$, y denotaremos al índice $N$ de $\mathrm{ESTAB}(G)$ por $n_E(G)$. Todos los resultados se presentan sobre $\mathbb{R}^n$.

Sea $a^T x \leq b$ una desigualdad válida para $\mathrm{STAB}(G)$. Por el teorema 3, existe un $t \leq n$ tal que $a^T x \leq b$ es válida para $N^t(G)$. El menor $t$ con esta propiedad es el índice $N$ de $a^T x \leq b$. El índice $N_+$ se define de manera similar.

Los siguientes resultados de Lovász y Schrijver [3] son útiles para acotar superiormente los índices $N$ y $N_+$, respectivamente.

**Teorema 6** ([3])**.** *El polítopo $N(G)$ es exactamente el conjunto solución de las restricciones de no negatividad, arista y agujero impar.*

**Corolario 7** ([3])**.** *Si para algún nodo $i \in V$, $n_E(G \setminus i) \leq k$, se tiene que $n_E(G) \leq k+1$.*

A partir de las observaciones anteriores, Lovász y Schrijver obtuvieron las siguientes cotas para el índice $N$ de un grafo.

**Corolario 8** ([3])**.** *Para todo grafo $G$, $\frac{n}{\alpha} - 2 \leq n_E(G) \leq n - \alpha - 1$, donde $\alpha = \alpha(G)$ es el número de estabilidad de $G$.*

Para el operador $N_+$, los autores demostraron la siguiente propiedad.

**Lema 9** ([3])**.** *Si $a^T x \leq b$ es una desigualdad válida para $\mathrm{STAB}(G)$ tal que para todo $i \in V$ con coeficiente positivo, la contracción de $i$ da una desigualdad con índice $N_+$ a lo más $k$, entonces $a^T x \leq b$ tiene índice $N_+$ a lo más $k+1$.*

Las desigualdades de clique, agujero impar y antiagujero impar tienen la propiedad que, contrayendo cualquier nodo, se obtiene una desigualdad en la cual los nodos con coeficiente positivo inducen un grafo bipartito. Además, para un grafo bipartito $G$, se tiene $\mathrm{STAB}(G) = \mathrm{ESTAB}(G)$, de donde $n_E(G) = 0$. Aplicando el lema anterior, se concluye, por tanto, lo siguiente.

**Corolario 10** ([3])**.** *Las desigualdades de clique, agujero impar y antiagujero impar tienen índice $N_+$ igual a 1.*

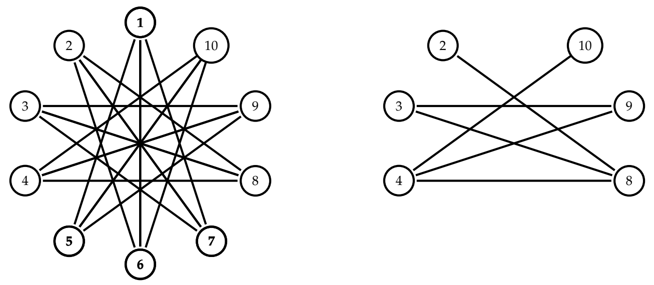
# 3 Índices $N$ y $N_+$ para antiwebs

La desigualdad de rango asociada a una antiweb $\overline{W}_n^k$ está dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k+1.$$

Se conoce que esta desigualdad es válida para $\mathrm{STAB}(\overline{W}_n^k)$ y que define una faceta si y solo si la antiweb es prima [5]. Además, se ha demostrado que el polítopo de conjuntos estables $\mathrm{STAB}(\overline{W}_n^k)$ está descrito completamente por las desigualdades de no negatividad, de clique y de rango asociadas a todas las subantiwebs primas inducidas, incluida, de ser el caso, $\overline{W}_n^k$ [6].

Para calcular el índice $N_+$ de una antiweb, es posible aplicar el lema 9. Se conoce que las antiwebs son grafos casi bipartitos y. por lo tanto, al contraer cualquier nodo $i$ de la antiweb $\overline{W}_n^k$, se obtiene un grafo bipartito. En la figura 2 se ilustra el procedimiento de contraer el nodo 1 de la antiweb $\overline{W}_{10}^3$. Se tiene que $n_E^+(\overline{W}_n^k - i - \Gamma(i))$ es 0 para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, el índice $N_+$ de $\overline{W}_n^k$, $n_E^+(\overline{W}_n^k)$, es a lo más 1. Además, es fácil demostrar que las únicas antiwebs bipartitas son aquellas con $n = 2k+2$, de donde obtenemos el siguiente resultado:




(a) Nodos vecinos del nodo 1.

(b) La contracción del nodo 1 da como resultado un grafo bipartito.

**Figura 2.** Contracción de un nodo en la antiweb $\overline{W}_{10}^3$.

**Teorema 11.** *El índice $N_+$ de toda antiweb $\overline{W}_n^k$, con $n \geq 2k+3$, es igual 1.*

Por otra parte, el cálculo del índice $N$ para una antiweb resulta ser una tarea difícil en general. En las próximas dos secciones presentamos un esquema constructivo que nos permite acotar este valor para algunas familias particulares.

# 4 Sucesiones constructivas

La idea de sucesiones constructivas fue empleada en [2] para acotar superiormente el rango de Chvátal de las relajaciones de arista y de clique del polítopo de conjuntos estables asociado a grafos de la clase antiwebs.

Dada una desigualdad $a^T x \leq b$ válida para un polítopo $P$, donde $a$ es un vector entero, la desigualdad $a^T x \leq \lfloor b \rfloor$ es válida para el polítopo entero $P_I$ y puede cortar una parte de $P$. Esta desigualdad se conoce como *plano cortante de Gomory-Chvátal* para $P$.

La intersección de $P$ con todos sus planos cortantes de Gomory-Chvátal se llama *clausura elemental* de $P$ y se denota por $P'$. Claramente, se tiene que $P_I \subseteq P'$ y se puede demostrar que $P'$ es un polítopo. Por lo tanto, el procedimiento de tomar la clausura elemental puede ser iterado para obtener relajaciones cada vez más ajustadas de la envolvente entera $P_I$. Sean $P^{(0)} = P$ y $P^{(t+1)} = (P^{(t)})'$, para $t \geq 0$. Chvátal [1] demostró que para todo poliedro acotado $P \subseteq \mathbb{R}^n$, existe un $t \in \mathbb{N}$ tal que $P^t = P_I$. El *rango de Chvátal de un poliedro $P$*, notado por $\mathrm{cr}(P)$, se define como el menor $t$ con esta propiedad.

Por otra parte, si $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un poliedro y $a^T x \leq b$ es una desigualdad válida para $P_I$, la *profundidad* de $a^T x \leq b$ con respecto a $P$ es el menor $t \in \mathbb{N}$ tal que $a^T x \leq b$ es válida para $P^t$. Notaremos, en adelante, a este valor por $d(a,b)$. Para el caso específico del polítopo de conjuntos estables $\mathrm{STAB}(G)$, si $a^T x \leq b$ es la desigualdad de rango de un subgrafo $G' \subseteq G$, notaremos $d(a,b)$ simplemente por $d(G')$.

Como consecuencia de la caracterización de $\mathrm{STAB}(\overline{W}_n^k)$, señalada al inicio de la sección, el rango de Chvátal de la relajación de aristas del polítopo de conjuntos estables asociado a la antiweb $\overline{W}_n^k$, que notaremos por $\mathrm{cr}(\overline{W}_n^k)$, puede calcularse a partir de las profundidades de las desigualdades de rango $d(\overline{W}_{n'}^{k'})$ correspondientes a todas las subantiwebs primas inducidas $\overline{W}_{n'}^{k'} \subseteq \overline{W}_n^k$.

En [2] se presentan condiciones para que la desigualdad de rango de una subantiweb $\overline{W}_{n'}^{k'} \subseteq \overline{W}_n^k$ pueda usarse para generar la desigualdad de rango de la antiweb $\overline{W}_n^k$ en una sola iteración del procedimiento Chvátal-Gomory. Se plantea, además, un algoritmo, el cual construye para cada subantiweb $\overline{W}_n^k$ una sucesión de subantiwebs de la forma:

$$\overline{W}_{n_0}^{k_0} \subset \overline{W}_{n_1}^{k_1} \subset \cdots \subset \overline{W}_{n_t}^{k_t} = \overline{W}_n^k.$$

Esta sucesión satisface la siguiente propiedad: la desigualdad de rango de $\overline{W}_{n_i}^{k_i}$ puede obtenerse a partir de la desigualdad de rango de $\overline{W}_{n_{i-1}}^{k_{i-1}}$ mediante una sola aplicación del procedimiento Chvátal-Gomory para todo $1 \leq i \leq t$. Si se conoce el valor de $d(\overline{W}_{n_0}^{k_0})$, puede obtenerse la siguiente cota superior para $d(\overline{W}_n^k)$:

$$d(\overline{W}_n^k) \leq t + d(\overline{W}_{n_0}^{k_0}).$$

En consecuencia, este procedimiento puede usarse para acotar el valor de $\mathrm{cr}_E(\overline{W}_n^k)$ si es aplicado sobre cada una de las subantiwebs primas de $\overline{W}_n^k$.

En el presente trabajo, hemos explorado la posibilidad de aplicar la idea de sucesiones constructivas para acotar el índice $N$ de la relajación de aristas del polítopo de conjuntos estables asociado a una antiweb.

Dadas una antiweb $\overline{W}_n^k$ y una subantiweb inducida $\overline{W}_{n'}^{k'} \subseteq \overline{W}_n^k$, notaremos por $\eta(\overline{W}_{n'}^{k'})$ (resp. $\eta^+(\overline{W}_{n'}^{k'})$) el índice $N$ (resp. el índice $N_+$) de la desigualdad de rango asociada a $\overline{W}_{n'}^{k'}$,

$$\sum_{i \in \overline{W}_{n'}^{k'}} x_i \leq k' + 1, \tag{4}$$

con relación a $\mathrm{ESTAB}(\overline{W}_n^k)$. Recordemos que este índice es el menor $r \in \mathbb{N}$ tal que (4) es válida para el polítopo

$$N^r(\overline{W}_n^k) = \underbrace{N(N(\ldots N(\overline{W}_n^k)\ldots))}_{r \text{ veces}}.$$

(Para $\eta^+$ se tiene la definición correspondiente.)

Como $\mathrm{STAB}(\overline{W}_n^k)$ está completamente definido por restricciones de no negatividad y desigualdades de rango de subantiwebs primas, se tiene que:

$$n_E(\overline{W}_n^k) = \text{máx}\{\eta(\overline{W}_{n'}^{k'}) : \overline{W}_{n'}^{k'} \subseteq \overline{W}_n^k, \quad \overline{W}_{n'}^{k'} \text{ es prima}\}$$

y

$$n_E^+(\overline{W}_n^k) = \text{máx}\{\eta^+(\overline{W}_{n'}^{k'}) : \overline{W}_{n'}^{k'} \subseteq \overline{W}_n^k, \quad \overline{W}_{n'}^{k'} \text{ es prima}\}.$$

Esto justifica la siguiente definición.

**Definición 5.** *Una sucesión de antiwebs*

$$\overline{W}_{n_0}^{k_0} \subset \overline{W}_{n_1}^{k_1} \subset \cdots \subset \overline{W}_{n_t}^{k_t} = \overline{W}_n^k \tag{5}$$

*es una sucesión $N$–constructiva cuando para todo $i = 1, \ldots, t$ y $j \in \mathbb{N}$, se tiene que si la desigualdad de rango de $\overline{W}_{n_{i-1}}^{k_{i-1}}$ es válida para $N^j(\overline{W}_n^k)$, entonces la desigualdad de rango de $\overline{W}_{n_i}^{k_i}$ es válida para $N^{j+1}(\overline{W}_n^k)$.*

Notar que de manera análoga a lo que ocurre con el rango de Chvátal, la existencia de una sucesión como (5) implica una cota superior para el índice $N$ de la desigualdad de rango asociada a $\overline{W}_n^k$:

$$\eta(\overline{W}_n^k) \leq \eta(\overline{W}_{n_0}^{k_0}) + t.$$

La pregunta fundamental que hemos examinado es si es posible, y bajo qué condiciones, obtener sucesiones constructivas para determinadas familias de antiwebs.

### Ejemplo

Como motivación, examinaremos la generación de la desigualdad de rango del agujero impar $C_5 = \overline{W}_5^1$ ilustrado en la figura 3 a partir de las desigualdades de aristas.

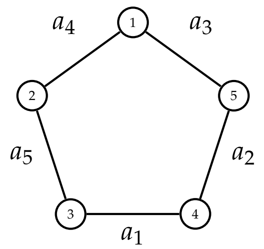



**Figura 3.** El agujero impar $C_5 = \overline{W}_5^1$.

Recordemos que para aplicar los resultados de la primera sección, debemos homogeneizar el problema. La desigualdad de rango de $C_5$,

$$x(C_5) := \sum_{i \in C_5} x_i \leq 2, \tag{6}$$

homogeneizada toma la forma

$$2x_0 - \sum_{i\in C_5} x_i \geq 0,$$

y su vector de incidencia es

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$

donde $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^5$.

Demostrar que (6) tiene índice $N$ menor o igual a 1 es equivalente a demostrar que es una desigualdad válida para $N(C_5)$. Si $\hat{a} \in N(\text{EST}(C_5))^* \subseteq \mathbb{R}^6$, entonces

$$\hat{a}^T x \geq 0 \text{ para todo } x \in N(\text{EST}(C_5)),$$

y por tanto $\sum_{i\in C_5} x_i \leq 2$ es válida para $N(C_5)$, en virtud de que $N(C_5) \cong N(\text{EST}(C_5)) \cap \{x \in \mathbb{R}^6 : x_0 = 1\}$. Del lema 4, sabemos que $\hat{a} \in N(\text{EST}(C_5))^*$ si y solo si $\hat{a}e_0^T \in M(\text{EST}(C_5))^*$. Por otra parte, de (2), en el teorema 5, tenemos:

$$M(\text{EST}(C_5))^* = U_{\text{skew}} + U_1 + \text{cone}\{uv^T : u \in \text{EST}(C_5)^*, v \in Q^*\}.$$

Por lo tanto, basta con expresar $\hat{a}e_0^T$ como la suma de tres matrices en $\mathbb{R}^{6\times 6}$, pertenecientes a los conjuntos arriba señalados. Puesto que se sabe que $U_1$ está generado por $f_i e_i^T$, $i = 1, \ldots, 5$, buscamos una expresión de la forma

$$\hat{a}e_0^T = A + \sum_{i=1}^{5} \lambda_i e_i f_i^T + \sum_{t=1}^{m} \gamma_t u_t v_t^T,$$

donde $A$ es una matriz antisimétrica, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \ldots, 5$, $u_t \in \text{EST}(C_5)^*$, $v_t \in Q^* = \text{cone}\{e_i, f_i : 1 \leq i \leq 5\}$ y $\gamma_t \in \mathbb{R}_+$, $t = 1, \ldots, m$.

Por otro lado,

$$\text{EST}(C_5) = \{x \in \mathbb{R}^6 : x_i \geq 0 \; \forall i \in C_5,\; x_i + x_j \leq x_0 \; \forall ij \in E(C_5)\},$$

y puede ser escrito de forma matricial de la siguiente manera:

$$\text{EST}(C_5) = \{x \in \mathbb{R}^6 : \widehat{A}x \geq 0\},$$

donde

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \widehat{I}_5 \\ \widehat{A}_0 \end{pmatrix},$$

con

$$\widehat{I}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la definición de polaridad,

$$\text{EST}(C_5)^* = \{v \in \mathbb{R}^6 : v^T x \geq 0 \, \forall x \in \text{EST}(C_5)\}.$$

Se puede ver fácilmente que si $v$ es un vector fila de la matriz $\widehat{A}$, entonces $v$ satisface $v^T x \geq 0$ para toda $x \in \text{EST}(C_5)$. Por otra parte, si $v \in \text{EST}(C_5)^*$, entonces la desigualdad $v^T x \geq 0$ es válida para $\text{EST}(C_5)$ y, por tanto, es combinación cónica de las desigualdades de $\widehat{A}x \geq 0$. Observar, además, que los vectores fila de $\widehat{I}_5$ y $\widehat{A}_0$ son los vectores de incidencia homogeneizados asociados a las desigualdades de no negatividad $x_i \geq 0$ y de arista $a_i$ para $i \in C_5$. Notaremos estos vectores por $\hat{e}^i$ y $\hat{a}^i$, respectivamente. Por tanto,

$$\text{EST}(C_5)^* = \text{cone}\{\hat{e}^i,\; \hat{a}^i : \quad \forall i \in C_5\}.$$

Consideremos ahora las matrices

$$C_1 := (\hat{a}^2 + \hat{a}^5)f_1^T + (\hat{a}^3 + \hat{a}^1)f_2^T + (\hat{a}^4 + \hat{a}^2)f_3^T + (\hat{a}^5 + \hat{a}^3)f_4^T + (\hat{a}^1 + \hat{a}^4)f_5^T$$

y

$$C_2 = (\hat{a}^1 + \hat{a}^3 + \hat{a}^4)e_1^T + (\hat{a}^2 + \hat{a}^4 + \hat{a}^5)e_2^T + (\hat{a}^3 + \hat{a}^5 + \hat{a}^1)e_3^T + (\hat{a}^4 + \hat{a}^1 + \hat{a}^2)e_4^T + (\hat{a}^5 + \hat{a}^2 + \hat{a}^3)e_5^T.$$

Puede verificarse que $C := C_1 + C_2$ pertenece a $\text{cone}\{uv^T : u \in \text{EST}(C_5)^*, v \in Q^*\}$ y, además, que:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, consideremos la matriz antisimétrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz $B \in U_1$, dada por:

$$B = -2\sum_{i=1}^{5} f_i e_i^T = -2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Al sumar estas matrices, se tiene que

$$A+B+C=\begin{pmatrix}10&0&0&0&0&0\\-5&0&0&0&0&0\\-5&0&0&0&0&0\\-5&0&0&0&0&0\\-5&0&0&0&0&0\\-5&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=5\hat{a}e_0^T.$$

Es decir, $5\hat{a}\in N(\mathrm{EST}(C_5))^*$, lo que implica que $5\hat{a}^Tx\geq 0$ es válida para $N(\mathrm{EST}(C_5))$ y, por tanto, $\sum_{i\in C_5}x_i\leq 2$ es válida para $N(C_5)$.

# 5 Cotas superiores para el índice $N$ de $\mathrm{EST}(\overline{W}_n^k)$

Expondremos a continuación un mecanismo para obtener sucesiones $N$–constructivas de antiwebs. Partimos del siguiente resultado clásico demostrado por Trotter.

**Teorema 12** ([5]). *La antiweb $\overline{W}_{n'}^{k'}$ es un subgrafo inducido de $\overline{W}_n^k$ si y solo si se tiene $n'<n$, $k'<k$ y*

$$\frac{k'}{k}n\leq n'\leq\frac{k'+1}{k+1}n.$$

En [4] fueron demostrados los siguientes lemas intermedios. En adelante, la adición de índices se considera siempre módulo $n$.

**Lema 13** ([4]). *Dados $k'$, $n'$, $q\in\mathbb{N}$ con $q\geq 2$, considerar la antiweb $\overline{W}_n^k$, donde $n:=qn'+1$ y $k:=q(k'+1)-1$. Denotemos por $V=\{1,\ldots,n\}$ al conjunto de nodos de $\overline{W}_n^k$. Para todo $j\in V$, el conjunto de nodos $V_j:=\{j+lq:0\leq l\leq n'-1\}$ induce una subantiweb de $\overline{W}_n^k$ isomorfa a $\overline{W}_{n'}^{k'}$.*

**Lema 14** ([4]). *Si $V_j$ se define como en el lema anterior,*

$$V_j\cap V_{j'}=\emptyset,\forall j,j'\in V \text{ tales que } 0<|j-j'|<q$$

*y, además,*

$$\cup_{i=1}^{q}V_{j+i}=V\setminus\{j\} \text{ para todo } j\in V.$$

A partir de los dos lemas puede demostrarse el resultado central del presente trabajo.

**Teorema 15.** *Sea $\overline{W}_{n'}^{k'}$ una subantiweb de $\overline{W}_n^k$ con $k'$, $n'$, $k$ y $n$ definidos como en el lema 13. Supongamos que $\eta(\overline{W}_{n'}^{k'})=t$. Entonces*

$$\eta(\overline{W}_n^k)\leq t+1.$$

*Demostración.* Demostraremos que la desigualdad de rango asociada a la antiweb $\overline{W}_n^k$,

$$x(\overline{W}_n^k)\leq k+1,$$

es válida para $N^{t+1}(\overline{W}_n^k)=N(N^t(\overline{W}_n^k))$. Sea $\hat{a}^j\in\mathbb{Q}^{n+1}$ el vector de incidencia de la desigualdad de rango homogeneizada asociada a la subantiweb inducida por $V_j$, definido como en el lema 13. Es decir,

$$\hat{a}_i^j=\begin{cases}k'+1 & \text{si } i=0,\\ -1 & \text{si } i\in V_j,\\ 0 & \text{en los demás casos.}\end{cases}$$

De la misma manera, $\hat{r}\in\mathbb{Q}^{n+1}$ denotará el vector de incidencia de la desigualdad de rango homogeneizada asociada a la antiweb $\overline{W}_n^k$, multiplicado por $n$.

Tenemos que demostrar que $\hat{r}$ pertenece a $N(N^t(\mathrm{EST}(\overline{W}_n^k)))^*$, ya que con esto se verifica que $\hat{r}^Tx\geq 0$ para todo $x\in N(N^t(\mathrm{EST}(\overline{W}_n^k)))$.

Por el lema 4, $\hat{r}\in N(N^t(\mathrm{EST}(\overline{W}_n^k)))^*$ si y solo si $\hat{r}e_0^T\in M(N^t(\mathrm{EST}(\overline{W}_n^k)))^*$, donde

$$\hat{r}e_0^T=\begin{pmatrix}(k+1)n&0&0&\cdots&0\\-n&0&0&\cdots&0\\-n&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

De (2) sabemos que la matriz $\hat{r}e_0^T$ pertenece a $M(N^t(\mathrm{EST}(\overline{W}_n^k)))^*$ si y solo si $\hat{r}e_0^T$ puede ser escrita como la suma de una matriz antisimétrica, una matriz perteneciente a $U_1$ y una matriz elemento del cono $D:=\mathrm{cone}\{uv^T,u\in N^t(\mathrm{EST}(\overline{W}_n^k))^*,v\in Q^*\}$.

Notaremos por $\hat{a}^j\in\mathbb{R}^{n+1}$ el vector de incidencia asociado a la desigualdad de rango de la subantiweb de $\overline{W}_n^k$ inducida por $V_j$.

Del lema 14, sabemos que $(V_{i\oplus 1},\ldots,V_{i+q})$ es una partición del conjunto $V\setminus\{i\}$, por lo que, al sumar los vectores $\hat{a}^{i\oplus 1}+\cdots+\hat{a}^{i+q}$, tenemos un vector cuya primera entrada es $(k'+1)q$ y que tiene $-1$ en las demás entradas, salvo en la entrada $i$ que es 0. Luego, la matriz $C_1:=\sum_{i=1}^{n}(\hat{a}^{i\oplus 1}+\hat{a}^{i\oplus 2}+\cdots+\hat{a}^{i+q})f_i^T$ tiene la siguiente forma

$$C_1=\begin{pmatrix}q(k'+1)n&-q(k'+1)&-q(k'+1)&\cdots&-q(k'+1)\\-(n-1)&0&1&\cdots&1\\-(n-1)&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-(n-1)&1&1&\cdots&0\end{pmatrix},$$

donde, debido a que $f_i=e_0-e_i$, la primera columna de $C_1$ contiene a la suma cambiada de signo de las demás columnas. Definiendo

$$\overline{n}=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,$$

se tiene, igual que antes, que $(V_{i\oplus\overline{n}\oplus 1},\ldots,V_{i\oplus\overline{n}+q})$ es una partición del conjunto $V\setminus\{i\oplus\overline{n}\}$. Al unir este conjunto con la arista de $\overline{W}_n^k$ de la forma $\{i,i+\overline{n}\}$, se logra recubrir todos los nodos una sola vez y el nodo $i$ dos veces. Notaremos por $\hat{a}^{i,i+\overline{n}}$ al vector de incidencia asociado a la desigualdad de arista $x_i+x_{i+\overline{n}}\leq 1$ homogeneizada. Al sumar los vectores $\hat{a}^{i\oplus\overline{n}\oplus 1}, \ldots, \hat{a}^{i\oplus\overline{n}+q}, \hat{a}^{i,i\oplus\overline{n}}$, se tiene un vector donde la primera entrada es $(k'+1)q+1$, la $i$-ésima entrada es $-2$ y el resto es $-1$. Por lo tanto, la matriz $C_2$ definida por $\sum_{i=1}^{n}(\hat{a}^{i\oplus\overline{n}\oplus 1} + \cdots + \hat{a}^{i\oplus\overline{n}+q-1} + \hat{a}_{i,i\oplus\overline{n}})e_i^T$ tiene la siguiente forma

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & q(k'+1)+1 & q(k'+1)+1 & \cdots & q(k'+1)+1 \\ 0 & -2 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}.$$

Sumando $C_1$ y $C_2$ se tiene

$$C := C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} q(k'+1)n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -(n-1) & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ -(n-1) & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(n-1) & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix}.$$

De la hipótesis $\eta(\overline{W}_{n'}^{k'}) = t$, se sabe que $\hat{a}^j \in N^t(\mathrm{EST}(\overline{W}_n^k))^*$ para todo $j \in V(\overline{W}_n^k)$. Además, $\hat{a}^{i,i+\overline{n}} \in N^t(\mathrm{EST}(\overline{W}_n^k)^*$, pues la desigualdad de arista (homogeneizada) es válida para $\mathrm{EST}(\overline{W}_n^k) \supseteq N^t(\mathrm{EST}(\overline{W}_n^k))$. Luego, la matriz $C$ pertenece al cono $D$.

Observar que, por la definición de $n'$ y $k'$ en el lema 13, en la matriz anterior se tiene que $q(k'+1)n = (k+1)n$. Finalmente, considerar la matriz antisimétrica $A$ y la matriz $B \in U_1$ descritas abajo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

Puede verificarse que

$$\hat{r}e_0^T = A + B + C,$$

y de (2), concluimos que $\hat{r}e_0^T \in M(N^t(\mathrm{EST}(\overline{W}_n^k)))^*$. $\square$

Del teorema 15, se obtiene el siguiente resultado:

**Corolario 16** ([4]). *Sean $q \geq 2$, $n_0, k_0, i \in \mathbb{N}$. Si $n_i = n_0 q^i + \frac{q^i - 1}{q-1}$ y $k_i = (k_0+1)q^i - 1$, entonces*

$$\eta(\overline{W}_{n_i}^{k_i}) \leq \eta(\overline{W}_{n_0}^{k_0}) + i.$$

# Referencias


[1] V. Chvátal. Edmonds polytopes and a hierarchy of combinatorial problems. *Discrete Math*, pages 205–337, 1973.

[2] Eugenia Holm, Luis M. Torres, and Annegret Wagler. On the Chvátal-rank of linear relaxations of the stable set polytope. *International Transactions in Operational Research*, pages 827–849, 2010.

[3] László Lovász and Alexander Schrijver. Cones of matrices and set-functions and 0-1 optimization. *SIAM Journal of Optimization*, pages 166–190, 1991.

[4] Maribel Montenegro. Índices $N$ y $N_+$ del polítopo de conjuntos estables asociado a ciertas familias de antiwebs. Undergraduate thesis, Escuela Politécnica Nacional, 2012.

[5] Leslie E. Trotter, Jr. A class of facet producing graphs for vertex packing polyhedra. *Disc. Math.*, (12):373–388, 1975.

[6] Annegret Wagler. Antiwebs are rank-perfect. *4OR*, 2(2):149–152, 2004.