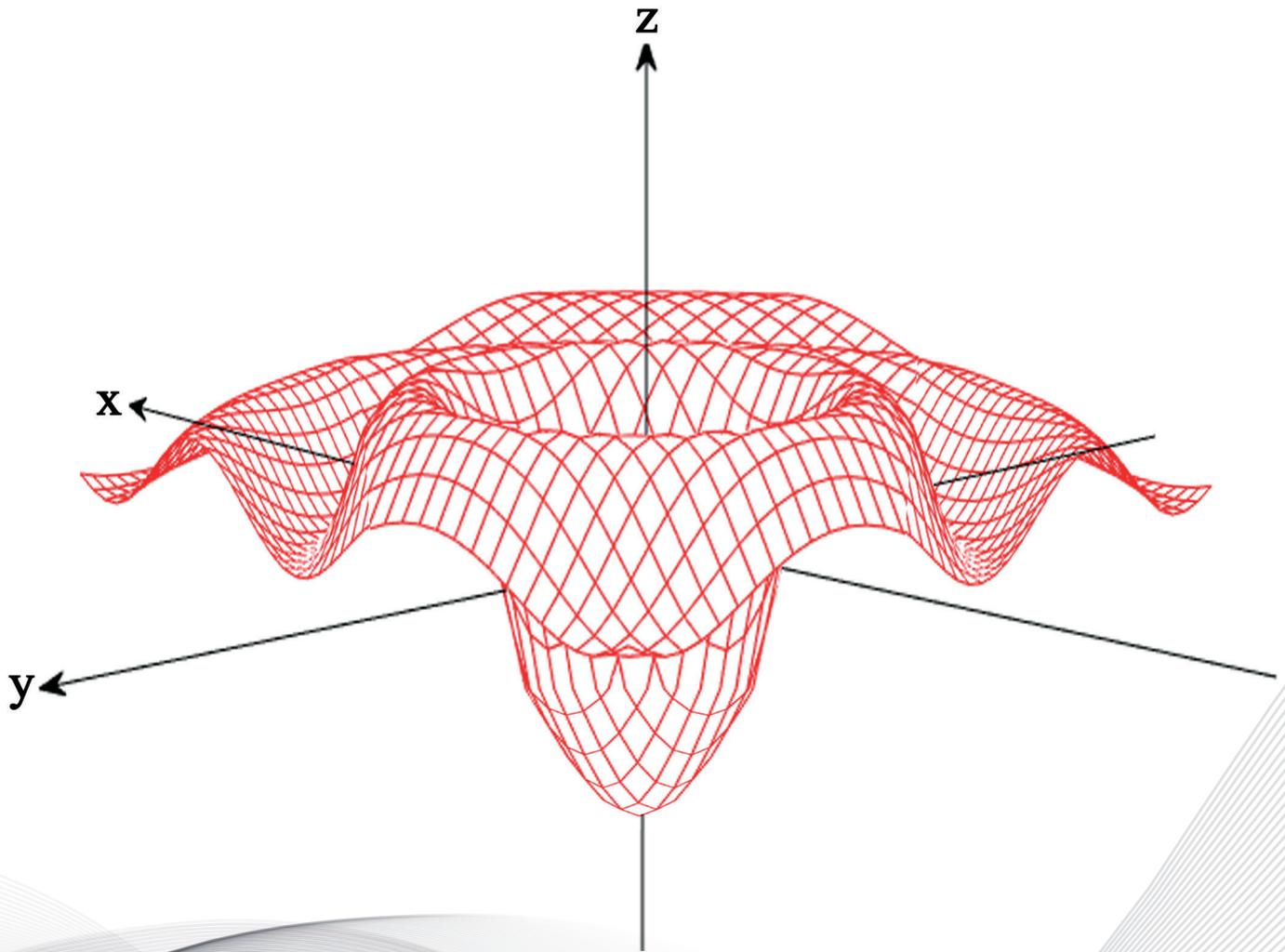


revista
politécnica

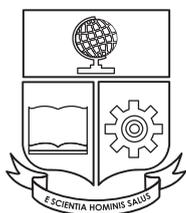


ESCUELA
POLITÉCNICA
NACIONAL

ISSN: 1390-0129
eISSN: 2477-8990

Volumen 45, No. 2 Mayo · Julio 2020

revista
politécnica



ESCUELA
POLITÉCNICA
NACIONAL

ISSN: 1390-0129
eISSN: 2477-8990

Volumen 45, No. 2 Mayo · Julio 2020

TEMÁTICA Y ALCANCE

La Revista Politécnica es una publicación periódica trimestral, editada por la Escuela Politécnica Nacional del Ecuador, cuyo objetivo es contribuir al conocimiento científico y tecnológico, mediante la publicación de estudios científicos relacionados a las áreas de ciencias básicas (física, química y matemática) e ingenierías (agroindustria, ambiental, civil, eléctrica, electrónica, geología, mecánica, petróleos, sistemas y química). La Revista Politécnica está dirigida a profesionales e investigadores que trabajan en estos campos del conocimiento.

EDITOR

Oscar Eduardo Camacho, Ph.D.
Escuela Politécnica Nacional
editor.rp@epn.edu.ec

CO-EDITORA

Jenny Gabriela Torres, Ph.D.
Escuela Politécnica Nacional
coeditor.rp@epn.edu.ec

CONSEJO EDITORIAL

Ph.D. José Aguilar
Universidad de los Andes, Venezuela

Ph.D. Santiago Arellano
Chalmers University of Technology, Suecia

Ph.D. Carlos Avila
Escuela Politécnica Nacional, Ecuador

Ph.D. Leonardo Basile
Escuela Politécnica Nacional, Ecuador

Ph.D. Silvia Calderón
Universidad de los Andes, Venezuela

Ph.D. Jean François Dulhoste
Universidad de los Andes, Venezuela
Dr. Pamela Flores
Escuela Politécnica Nacional, Ecuador

Ph.D. Carlos Gallardo
Escuela Politécnica Nacional, Ecuador

Ph.D. Victor Hugo Hidalgo
Escuela Politécnica Nacional, Ecuador

Ph.D. Edinzo Iglesias
Universidad de los Andes, Venezuela

Ph.D. Francisco León
Universidad de los Andes, Venezuela

Ph.D. Orestes Llanes
Universidad Tecnológica de la Habana, Cuba

Ph.D. Diego Ordoñez
Universidad Tecnológica Equinoccial, Ecuador

Ph.D. Rui Pedro Paiva
University of Coimbra, Portugal

Ph.D. José Luis Paz
Escuela Politécnica Nacional, Ecuador

Ph.D. Nelson Pérez
Universidad de los Andes, Venezuela

Ph.D. Franklin Rivas
Universidad Técnica Federico Santamaría, Chile

Ph.D. Andrés Rosales
Escuela Politécnica Nacional, Ecuador

Ph.D. Gabriel Salazar
Organización Latinoamericana de Energía, Ecuador

Ph.D. Pablo Samaniego
Instituto de Investigación para el Desarrollo (IRD), Francia

Ph.D. Gustavo Scaglia
Universidad Nacional de San Juan, Argentina

Ph.D. Hebertt Sira-Ramirez
Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute, México

Ph.D. Carlos Smith
University of South Florida, Estados Unidos

Ph.D. Sebastian Taco
Escuela Politécnica Nacional, Ecuador

Ph.D. Cristian Vallejo
Escuela Politécnica Nacional, Ecuador

Ph.D. Marcos Villacis
Escuela Politécnica Nacional, Ecuador

Ph.D. Cesar Witt
Université des Sciences et Technologies de Lille, Francia

La Revista Politécnica está incluida en Scientific Electronic Library Online (SciELO), Catálogo 2.0 de Latindex, Directory of Open Access Journals (DOAJ), Red Iberoamericana de Innovación y Conocimiento Científico (REDIB), Matriz de Información para el Análisis de Revistas (MIAR), Bielefeld Academic Search Engine (BASE), CiteFactor, PKP Index, Google Scholar, ResearchBib, International Institute of Organized Research (I2OR).

Se autoriza la reproducción total o parcial de su contenido siempre y cuando se cite la fuente. Los conceptos expresados son de responsabilidad exclusiva de sus autores.

Coordinador Técnico Operativo

Ing. Ricardo Villarroel
ricardo.villarroel@epn.edu.ec
Teléfono: (+593) 2976300 ext. 5220

Ing. Katherine Aro
katherine.aro@epn.edu.ec

Proofreader

MSc. María Eufemia Torres

Diseño de Portada

Ing. Cristian Basurto

AUTORIDADES

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

**Vicerrectora de Investigación,
Innovación y Vinculación**
Alexandra Alvarado, Ph.D.

Rectora
Florinella Muñoz, Ph.D.

Vicerrector de Docencia
Iván Bernal, Ph.D.

Palabras del Editor

El Volumen 45 N° 2 de la Revista Politécnica presenta seis artículos asociados a diferentes disciplinas del conocimiento. Deseamos que estos trabajos logren servir de guía a investigadores, docentes y estudiantes en su quehacer diario. Una breve descripción de estos temas se muestra a continuación:

El primer artículo es presentado por Aguilar y Calahorrano. En este artículo se presentan los esquemas de demostración del Teorema de Paso de Montaña clásico de Ambrosetti y Rabinowitz y del Teorema de Paso de Montaña topológico de Katriel. Se estudian brevemente las aplicaciones particulares de dichos teoremas: existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales y teoremas de homeomorfismos, respectivamente. Se demuestra que existe un teorema en teoría de puntos críticos en dimensión finita que puede verse como una aplicación en común de ambos resultados. Se hace un análisis de las características teóricas de la estructura de las demostraciones de ambos teoremas y para finalizar, se buscan relaciones lógicas entre éstos.

Vargas, y coautores realizan el segundo trabajo. En este se describe el diseño, simulación e implementación de un prototipo de gestión, operación y control de un sistema de iluminación fotovoltaico desde una plataforma Cloud/GIS. La plataforma Cloud/GIS regula la intensidad lumínica de diferentes luminarias LED interconectadas y visualizadas en un Sistema de Información Geográfico, GIS. El prototipo electrónico de iluminación LED se instaló en la Universidad Técnica de Ambato. El prototipo de control automático de iluminación se programa para dos formas de funcionamiento: los días de lunes a viernes, y los sábados y domingos. Asimismo, se propone una metodología de análisis del impacto económico y medioambiental, asociado a la implementación de una plataforma de gestión, operación y control de sistemas fotovoltaicos de iluminación. Finalmente, se realizó un análisis comparativo del impacto económico y medioambiental de sistemas convencionales de alumbrado público, sin ningún tipo de control de luminosidad, frente a un sistema de alumbrado público integrado a una plataforma Cloud/GIS de gestión, operación y control de luminarias LEDs.

El tercer trabajo presentado por Cisterna-Arellano y colaboradores tiene como objetivo evaluar económicamente proyectos de menor escala como son los de Generación Distribuida, calculando su rentabilidad privada y de carácter social, incluida una valoración económica ambiental de proyectos en la inter comuna de Chillán – Chillán Viejo, como un estudio de caso. Para ello, se analiza la Ley 20.571, que permite a las generadoras residenciales vender sus excedentes de energía a la distribuidora eléctrica a precio regulado. Se realizó un estudio para 17 instalaciones del área residencial, agrícola, industrial y comercial, desarrollando un análisis del Valor Actual Neto (VAN) y la Tasa Interna de Retorno (TIR). Se construyeron los promedios móviles de consumo antes y posterior a sus operaciones, pagos directos, costos e ingresos por venta de excedentes. Asimismo, se simuló una compensación de ingresos por venta de bonos de carbono. Los resultados, tanto en evaluación privada como la valoración económica ambiental, arrojan resultados desfavorables, de lo cual se puede inferir que este tipo de proyectos no son rentables en los sectores que abarca el estudio, y es necesario un apoyo estatal a la inversión inicial o la tarifa. Sin embargo, existe una dimensión que va más allá de lo económico que debe sustentar una política fiscal de apoyo para los próximos años.

Guamialamá, Freire y Valencia son los autores del cuarto artículo. En este trabajo se determinó las distribuciones de permeabilidad y se comparó entre los métodos núcleos-registros eléctricos, registros eléctricos-probadores de formación y pruebas de presión-análisis transiente de producción. A partir de estas comparaciones, se identificaron las diferencias en los valores de permeabilidad, así como las diferencias en las escalas de medición. Una vez establecidos los valores de permeabilidad a partir de cada método, se realizó un análisis e interpretación, determinando una productividad teórica de cada uno de ellos, y comparándola con datos de

producción real se estableció el mejor método para la estimación de esta propiedad para el campo Shushufindi.

Merino, y Trujillo en el quinto trabajo estudian el problema de redefinir el dominio de una función real dada para que esta sea inyectiva, desde el caso más general, hasta llegar a las restricciones necesarias para que este Problema sea equivalente al Axioma de Elección.

Matango y Ávalos describen el diseño e implementación de un sistema bifrecuencial que puede ser usado como alternativa para el tratamiento de enfermedades en la boca mediante la irradiación de luz láser de baja potencia. El sistema es un prototipo, cuyo diseño mecánico es creado en un software de uso libre para luego ser impreso en un modelo 3D el cual alberga toda la parte electrónica y óptica. En cuanto a la parte electrónica, se monta sobre varios módulos los cuales cumplen diferentes funciones como son: el cargador de la batería, convertidores de potencia, drivers para los disparadores, una pantalla OLED que muestra información de los sensores, todo el proceso y mandos tanto manuales como automáticos son controlados por una tarjeta de desarrollo. El sistema óptico comprende de; un arreglo de espejos que básicamente dan el direccionamiento a la luz de los láseres y hacen que incidan sobre un mismo punto, al final se integra una fibra óptica para poder ingresar a partes inaccesibles en la boca para el tratamiento. Para validar el prototipo implementado, se realizaron mediciones tanto de la irradiancia como de la potencia en equipos especializados para estas aplicaciones, a más de basarse en revistas odontológicas y artículos de salud publicados por distintos institutos y universidades.

Oscar Eduardo Camacho Quintero, Ph.D.

EDITOR

Contenido
Vol. 45, No. 2
Mayo 2020 – Julio 2020

7

Aguilar Miguel; Calahorrano Marco

Comparación y Contraste de los Enfoques Clásico (Ambrosetti y Rabinowitz) y Topológico (Katriel) del Teorema de Mountain Pass (Paso de Montaña)

Comparison and Contrast of the Classical (Ambrosetti and Rabinowitz) and Topological (Katriel) Approaches of the Mountain Pass Theorem

19

Vargas Carlos; Guamán Jesús; Rodríguez Katherine; Ríos Alberto

Diseño e Implementación de una Plataforma Informática CLOUD/GIS de Gestión, Operación y Control de Sistemas Fotovoltaicos de Iluminación

Design and Implementation of CLOUD/GIS Platform for Management, Operation and Control of Photovoltaic Lighting Systems

31

Cisterna Arellano Luis; Améstica-Rivas Luis; Piderit María Beatriz

Proyectos Fotovoltaicos en Generación Distribuida ¿Rentabilidad Privada o Sustentabilidad Ambiental?

Photovoltaic Projects in Distributed Generation. Private Profitability or Environmental Sustainability?

41

Guamialamá Carlos; Freire José; Valencia Raúl

**Impacto de los Métodos Aplicados para la Determinación de la Permeabilidad y su
Influencia en el Gerenciamiento del Reservorio en el Campo Shushufindi**

*Impact of the Applied Methods for the Determination of Permeability and its Influence in the
Management of the Reservoir in Shushufindi Field*

51

Merino Andrés; Trujillo Juan C.

Equivalencia del Axioma de Elección con el Problema de Redefinición de Funciones

Equivalence of the Axiom of Choice with the Problem of the Redefinition of Functions

57

Matango Santiago; Ávalos Eduardo

Diseño e Implementación de un Sistema Bifrecuencial Basado en Láseres de Baja Potencia

Design and Implementation of a Bifrequencial System Based on Low Power Lasers

Comparación y Contraste de los Enfoques Clásico (Ambrosetti y Rabinowitz) y Topológico (Katriel) del Teorema de Mountain Pass (Paso de Montaña)

Aguilar, Miguel¹ *  ; Calahorrano, Marco¹ 

¹Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemática, Quito, Ecuador

Resumen: En este artículo se presentan los esquemas de demostración del Teorema de Paso de Montaña *clásico* de Ambrosetti y Rabinowitz y del Teorema de Paso de Montaña *topológico* de Katriel. Se estudian brevemente las aplicaciones particulares de dichos teoremas: existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales y teoremas de homeomorfismos, respectivamente. Se demuestra que existe un teorema en teoría de puntos críticos en dimensión finita que puede verse como una aplicación en común de ambos resultados. Se hace un análisis de las características teóricas de la estructura de las demostraciones de ambos teoremas y para finalizar, se buscan relaciones lógicas entre éstos.

Palabras clave: Paso de Montaña, Análisis no-lineal, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Topología General.

Comparison and Contrast of the Classical (Ambrosetti and Rabinowitz) and Topological (Katriel) Approaches of the Mountain Pass Theorem

Abstract: In this article we present the outlines of the proofs of the *classical* Mountain Pass Theorem by Ambrosetti and Rabinowitz and the *topological* Mountain Pass Theorem by Katriel. We study the particular applications of these theorems: existence of solutions for partial differential equations and homeomorphisms theorems, respectively. We prove that there exists a theorem in critical point theory in finite dimension that can be seen as a common application of both results. We made an analysis of the theoretical characteristics of the structure of the proofs of each theorem and finally we show if there is a logical relation between them.

Keywords: Mountain Pass, Non-linear analysis, Partial Differential Equations, General Topology.

1. INTRODUCCIÓN

En el ámbito académico matemático, la denominación Teorema de Paso de Montaña (abreviado TPM de aquí en adelante) suele asociarse automáticamente a un resultado de Ambrosetti y Rabinowitz (1973) enmarcado en el Análisis no-lineal. La razón de esta asociación automática se debe a la popularidad de sus aplicaciones en el campo de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, campo de amplio interés en Matemática y Ciencias afines. Sin embargo, bajo el mismo nombre existen otros resultados considerablemente menos populares pero de igual interés teórico. El presente es un trabajo en el que se realiza un análisis de comparación y contraste entre el famoso TPM de Ambrosetti y Rabinowitz, que se conoce como teo-

rema *clásico*, y uno de esos resultados menos conocidos, el TPM *topológico*, introducido por Katriel (1994).

El TPM clásico garantiza la existencia de puntos críticos para funcionales diferenciables definidos en espacios de Banach con imagen en la recta real. La siguiente definición describe qué es un punto crítico.

Definición 1.1 (Punto crítico de un funcional diferenciable). Sean E un espacio de Banach, $U \subset E$ un abierto e $I : U \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Un punto crítico de I es un punto $u \in U$ tal que

$$I'(u) = 0.$$

Si además $I(u) = c \in \mathbb{R}$, se dice que u es un punto crítico de I al nivel c .

*miguel.aguilar@epn.edu.ec
Recibido: 04/03/2020
Aceptado: 03/04/2020
Publicado: 31/05/2020
10.33333/rp.vol45n2.01
CC BY 4.0

Una de las hipótesis más importantes del TPM clásico es el cumplimiento de la condición de *Palais-Smale* por parte del funcional; tal condición se define a continuación.

Definición 1.2 (Condición de Palais-Smale). Considérese E un espacio de Banach e $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Una sucesión $(u_k)_k$ con $u_k \in E$ es llamada sucesión de Palais-Smale para I , si $(I(u_k))_k$ es una sucesión acotada en \mathbb{R} , e $I'(u_k) \rightarrow 0$ (en E'). Se dice que I satisface la condición de Palais-Smale (abreviando: I satisface (PS)) si toda sucesión de Palais-Smale para I tiene una subsucesión convergente (en E).

Ahora, se presenta el enunciado del TPM clásico.

Teorema 1.1 (Teorema de Paso de Montaña Clásico (Ambrosetti y Rabinowitz, 1973)). Sea E un espacio de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ un funcional continuamente diferenciable que satisface (PS) y tal que $I(0) = 0$. Supóngase que existen ρ y α números reales positivos tales que cumplen:

1. Si $\|u\| = \rho$ entonces $I(u) \geq \alpha$,
2. Existe $v \in E$ tal que $\|v\| > \rho$ e $I(v) \leq 0$.

Entonces I posee al menos un punto crítico a un nivel $c \geq \alpha$.

Las propiedades 1. y 2. de este teorema son conocidas como la geometría del funcional. A cualquier funcional que posea esas características se le llama un funcional con *geometría de paso de montaña*.

La demostración original del TPM clásico puede encontrarse en el artículo de Ambrosetti y Rabinowitz (1973) en donde por primera vez aparece; sin embargo, una versión más detallada es presentada por el propio Rabinowitz (1986).

Por su parte el TPM topológico es un teorema que toma lugar en espacios topológicos de amplia generalidad: no se precisa de ninguna noción de operaciones y mucho menos de diferenciable, como en el caso del clásico; por ello, es preciso definir una noción distinta de punto crítico, ya que la definición usual utiliza la estructura diferencial de los espacios, de la que en este caso se carece.

Definición 1.3 (Punto de paso de montaña). Sean X un espacio topológico y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que $x \in X$ es un punto global de paso de montaña (abreviado PM) de f si para toda vecindad V de x , el conjunto

$$\{y \mid f(y) < f(x)\} \cap V$$

es disconexo. Se dice que x es un punto local de PM de f si existe una vecindad M de x tal que x es un punto global de PM para $f|_M$.

La principal hipótesis sobre el funcional sobre el que actúa el TPM topológico es el crecimiento al infinito que se describe a continuación.

Definición 1.4 (Función creciente al infinito). Sea X un espacio topológico. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice creciente al infinito si para todo $x \in X$ existe un compacto $K \subset X$ tal que $f(z) > f(x)$ para todo $z \notin K$.

Antes de enunciar el teorema se recuerda lo que es un espacio compactamente conexo.

Definición 1.5 (Espacio compactamente conexo). Un espacio topológico X es llamado compactamente conexo si para cada par de puntos $x_1, x_2 \in X$ existe un conjunto K compacto y conexo tal que $x_1, x_2 \in K$.

Teorema 1.2 (Teorema de Paso de Montaña Topológico (Katriel, 1994)). Sea X un espacio topológico localmente conexo y compactamente conexo, $f \in C(X)$ una función continua y creciente al infinito. Supóngase que existen $x_1, x_2 \in X$ y $S \subset X$ tales que cumplen:

1. S separa x_1 y x_2 ,
2. $\max\{f(x_1), f(x_2)\} < \inf_{x \in S} f(x) = p$.

Entonces f posee un mínimo local o un punto global de paso de montaña a un nivel $c \geq p$.

Que $S \subset X$ separe x_1 y x_2 , quiere decir que x_1 y x_2 se encuentran en distintas componentes conexas de $X \setminus S$.

Este teorema fue demostrado por Katriel (1994), quien también demuestra una versión para espacios métricos.

2. NOCIONES TEÓRICAS Y PRÁCTICAS DE LOS TEOREMAS DE PASO DE MONTAÑA

Para desarrollar el análisis comparativo entre los dos teoremas se exploró detalladamente las características estructurales de la demostración de cada uno de ellos y sus aplicaciones particulares. Una vez obtenidas se procedió a analizar sus relaciones.

2.1 Estructura de la demostración del TPM clásico

Aunque no se realizará la demostración del TPM clásico, un esquema de la misma será presentado, para lo cual algunas definiciones son necesarias.

Definición 2.1 (Deformación). Sean E un espacio de Banach y $A \subset B \subset E$. Se dice que B es deformable en A si existe una función continua $\eta : [0, 1] \times B \rightarrow B$ tal que cumple con las siguientes tres características:

$$\begin{aligned} \eta(0, u) &= u, & \forall u \in B, \\ \eta(t, u) &\in A, & \forall u \in A \text{ y } \forall t \in [0, 1], \\ \eta(1, u) &\in A, & \forall u \in B. \end{aligned}$$

Observación 2.1. En general, para $B \subset E$, se llama deformación de B a la función continua $\eta : [0, 1] \times B \rightarrow B$ que satisface $\eta(0, u) = u$ para todo $u \in B$.

Definición 2.2 (Subniveles de un funcional). Sea E un espacio de Banach e $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se define,

$$I^a = \{u \in E \mid I(u) \leq a\}.$$

Estos conjuntos son conocidos como los subniveles del funcional I .

Definición 2.3 (Familia invariante). Sea E un espacio de Banach y sea η una deformación en E . Una familia Γ de subconjuntos de E se dice invariante para η si

$$\forall A \in \Gamma \text{ y } \forall t \in [0, 1], \eta(t, A) \in \Gamma.$$

Definición 2.4 (Clase de minimax). Sea E un espacio de Banach e $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Cualquier familia Γ de subconjuntos de E es llamada una clase de minimax, y el valor

$$c = \inf_{A \in \Gamma} \sup_{u \in A} I(u)$$

es llamado el nivel de minimax de Γ .

Definición 2.5 (Familia α -admisibles). Sea E un espacio de Banach, $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional, $\alpha > 0$ un número real, Γ una clase de minimax y c su nivel de minimax. Se dice que Γ es α -admisibles con respecto a I si

1. $c \in \mathbb{R}$
2. Γ es invariante con respecto a todas las deformaciones que fijan

$$E \setminus I^{-1}([c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}])$$

para algún $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \bar{\varepsilon} < \alpha$.

A continuación se resume la demostración del TPM clásico con el siguiente esquema de pasos.

1. Se muestra que para todo funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ que satisface (PS), dados $c \in \mathbb{R}$ y $\bar{\varepsilon} > 0$, se tiene la siguiente alternativa exclusiva: \mathbf{o} existe un punto crítico al nivel c para el funcional I \mathbf{o} el subnivel $I^{c+\bar{\varepsilon}}$ se deforma en el subnivel $I^{c-\bar{\varepsilon}}$, para cierto $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño ($\varepsilon < \bar{\varepsilon}$). Esto se conoce como el *Lema o Teorema de Deformación*
2. Se muestra que si una clase de minimax es α -admisibles con respecto a un funcional I que satisface (PS), entonces éste posee un punto crítico al nivel de minimax c . Esto se conoce como el *Principio de Minimax clásico* y se demuestra por reducción al absurdo suponiendo que no existe tal punto, lo que lleva a una contradicción con las características de la deformación existente desde un principio, gracias a la alternativa mencionada en el primer paso.
3. Se construye una clase de minimax para el funcional I . Utilizando las hipótesis de geometría del mismo y el hecho de que $I(0) = 0$, se prueba que dicha clase es α -admisibles, lo que implica, gracias al segundo paso, la existencia del punto crítico.

2.2 Aplicaciones del TPM clásico

La principal aplicación que posee el TPM clásico es como herramienta para garantizar la existencia de soluciones débiles de ecuaciones diferenciales parciales semilineales y elípticas. De hecho, fue con la motivación de encontrar soluciones de dichos problemas semilineales que Ambrosetti y Rabinowitz

¹ $2^* = \frac{2n}{n-2}$ es el exponente crítico de la inyección de $H^1(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$

lo estudiaron en primer lugar. Uno de los problemas tipo que se puede resolver con esta metodología se presenta a continuación.

Considérense $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado para $n \geq 3$, $q \in L^\infty(\Omega)$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y el problema de hallar $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que resuelva

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Se dice que u es solución débil del problema (1) si

1. $u \in H_0^1(\Omega)$, y
2. $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} q(x)uv dx = \int_{\Omega} f(v) dx$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

El procedimiento variacional para la solución de esta EDP consiste en encontrar un funcional $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable para el cual

$$I'(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} q(x)uv dx - \int_{\Omega} f(v) dx;$$

una vez logrado esto, basta probar que I posee un punto crítico para obtener la existencia de la solución débil deseada. Si $F(t) = \int_0^t f(s) ds$, entonces se puede probar que el funcional

$$I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x)u^2 dx - \int_{\Omega} F(u) dx,$$

posee tal derivada precisamente. Si se consideran las siguientes hipótesis, se puede emplear TPM clásico para garantizar la existencia del punto crítico.

Hipótesis

h_1 : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado y $q(x) \geq 0$ c.t.p $x \in \Omega$.

h_2 : f es continua y existen $p \in]2, 2^*[$ y $K > 0$ tales que

$$|f(t)| \leq K(|t|^{p-1} + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R}^1.$$

h_3 : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 0$.

h_4 : Existen $M > 0$ y $\mu > 2$ tales que si $|t| \geq M$, $f(t)t \geq \mu F(t)$.

h_5 : Existe $t_0 \in \mathbb{R}$ con $|t_0| \geq M$ tal que $F(t_0) > 0$.

El detalle de cómo utilizar tales hipótesis para probar que el funcional I posee geometría de paso de montaña y para demostrar que satisface (PS) se puede encontrar descrito por Badiale y Serra (2011).

Las aplicaciones del TPM clásico no se reducen a este tipo de problemas; de hecho, son numerosas y frecuentes en la investigación contemporánea, cuestión que hace imposible detallarlas en su totalidad; el lector interesado puede dirigirse a Ambrosetti (1992), Ambrosetti y Malchiodi (2007), Ambrosetti y Rabinowitz (1973), Badiale y Serra (2011), Evans (2010), Jabri (2003) o Rabinowitz (1986).

2.3 Estructura de la demostración del TPM topológico

Para presentar el esquema de demostración del TPM topológico son necesarias una serie de definiciones.

Definición 2.6 (Familia topológicamente admisible). Sea X un espacio topológico compactamente conexo; sean $x_1, x_2 \in X$ y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. La familia de conjuntos (clase de minimax)

$$\Gamma = \{\Sigma \subset X \mid \Sigma \text{ es conexo, compacto y } x_1, x_2 \in \Sigma\},$$

con nivel de minimax

$$c = \inf_{\Sigma \in \Gamma} \max_{x \in \Sigma} f(x),$$

se dice topológicamente admisible con respecto a f si

1. $c > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$;
2. Existe $B \in \Gamma$ tal que $\max_{x \in B} f(x) = c$.

Observación 2.2. Téngase en cuenta que, gracias a que se define en un espacio compactamente conexo, $\Gamma \neq \emptyset$. Además, la primera propiedad garantiza que $c \in \mathbb{R}$.

Análogamente a lo expuesto para el TPM clásico, se puede resumir la demostración del TPM topológico con un esquema de pasos.

1. Se muestra que todo subconjunto abierto y conexo C de todo espacio topológico X compactamente conexo, localmente conexo y localmente compacto, es también compactamente conexo (Katriel, 1994).
2. Se muestra que si X es compactamente conexo, localmente conexo y localmente compacto y la familia Γ (de los conjuntos conexos y compactos que contienen a x_1 y x_2) es topológicamente admisible, entonces un funcional continuo f posee un punto de mínimo local o un punto de paso de montaña al nivel de minimax c . Esto se conoce como *Principio de Minimax Topológico* y se obtiene suponiendo lo contrario, lo que lleva a encontrar un conjunto en la familia que contradice las características de ésta; proceso donde se utiliza lo mostrado en el primer paso.
3. Se prueba, utilizando las hipótesis 1. y 2. del TPM topológico y el crecimiento al infinito sobre el funcional, que la familia es topológicamente admisible para dicho funcional, lo que implica que exista el punto de mínimo o punto de paso de montaña, gracias al segundo paso.

2.4 Aplicaciones del TPM topológico

La mayoría de las aplicaciones del TPM topológico, y todas las que se presentan en esta sección, se pueden encontrar descritas por Katriel (1994) en el artículo en el que por primera vez introduce el teorema. En dichas aplicaciones se usa la siguiente versión del TPM a manera de corolario.

Corolario 2.1 (Katriel, 1994). Sean X un espacio topológico, localmente conexo y compactamente conexo, y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y creciente al infinito. Si x_1 y x_2 son mínimos locales estrictos de f , entonces existe $x_3 \in X$ que es un mínimo local o un punto global de paso de montaña de f , con $f(x_3) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$.

El principal teorema de aplicación del TPM topológico es el siguiente teorema de homeomorfismos.

Teorema 2.1. Sean X e Y dos espacios topológicos, Y conexo y X localmente compacto y compactamente conexo. Entonces una de las dos siguientes alternativas se sigue:

- (I) Toda función $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ continua y creciente al infinito tiene un número infinito de mínimos locales o un punto local de paso de montaña (o ambas).
- (II) Todo homeomorfismo local propio $F : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo global

Como para todo teorema de alternativa exclusiva, en este caso existen dos tipos de aplicaciones: por un lado si se tienen dos espacios X e Y que satisfacen las hipótesis del teorema y se pudiera encontrar una función $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ continua y creciente al infinito tal que sólo posee un número finito de mínimos locales y ningún punto de paso de montaña entonces se sabe que todo homeomorfismo local propio entre X e Y es homeomorfismo global. Por otro lado si se encuentra un homeomorfismo local propio $F : X \rightarrow Y$ que no sea homeomorfismo global entonces se sabría que cualquier función continua creciente al infinito $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ tendría infinitos mínimos locales o al menos un punto local de paso de montaña.

Para descargar un poco la terminología, considérese la siguiente definición.

Definición 2.7 (Función y espacio simple). Una función $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ continua y creciente al infinito y que posee únicamente un número finito de mínimos locales y ningún punto local de paso de montaña es llamada función simple. El espacio topológico Y que admite alguna función simple es llamado espacio simple.

Tomando en cuenta esta definición, se desprende directamente del Teorema 2.1 el siguiente resultado.

Teorema 2.2. Si X es un espacio topológico localmente conexo y compactamente conexo y Y es un espacio simple y conexo, entonces cualquier homeomorfismo local propio $F : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo global.

A continuación se presenta el detalle de algunos resultados que se obtienen directamente de este teorema.

Corolario 2.2. Todo homeomorfismo local propio de \mathbb{R}^n en sí mismo es un homeomorfismo global.

Demostración. Para aplicar el teorema precedente, sea $X = Y = \mathbb{R}^n$. Como \mathbb{R}^n es localmente conexo, compactamente conexo y conexo, entonces si se prueba que es simple, el resultado se sigue. Para ello se debe hallar al menos una función

²Si X e Y son dos espacios topológicos, una aplicación $F : X \rightarrow Y$ es llamada propia si para todo conjunto compacto $K \subset Y$, $F^{-1}(K)$ es compacto en X .

simple en \mathbb{R}^n . La función

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|$$

es simple. En efecto, la norma euclídea es continua y coerciva, propiedad que implica que es creciente al estar en dimensión finita (se probará esta afirmación más adelante). Además dado cualquier vector no nulo en \mathbb{R}^n siempre se puede encontrar uno con norma más pequeña, implicando esto que el único punto de mínimo es el mínimo global $x = 0$. Lo único que hace falta ver es que f no posee puntos locales de paso de montaña: para ello tómesese $x \in \mathbb{R}^n$ y M una vecindad de x . El objetivo es mostrar que existe $N \subset M$ vecindad de x que hace que $\{y \mid f(y) < f(x)\} \cap N$ sea conexo: se tiene por un lado que

$$\{y \mid f(y) < f(x)\} = \{y \mid \|y\| < \|x\|\} = B_{\|x\|}(0),$$

es la bola abierta de centro cero y radio $\|x\|$. Como M es abierto se sabe que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset M$. Tomando $N = B_\delta(x)$, que es claramente vecindad de x , se tiene lo buscado ya que $B_{\|x\|}(0) \cap B_\delta(x)$ es conexo al ser intersección de dos bolas abiertas en el espacio euclídeo. Un ejemplo en dos dimensiones es presentado en la Figura 1. \square

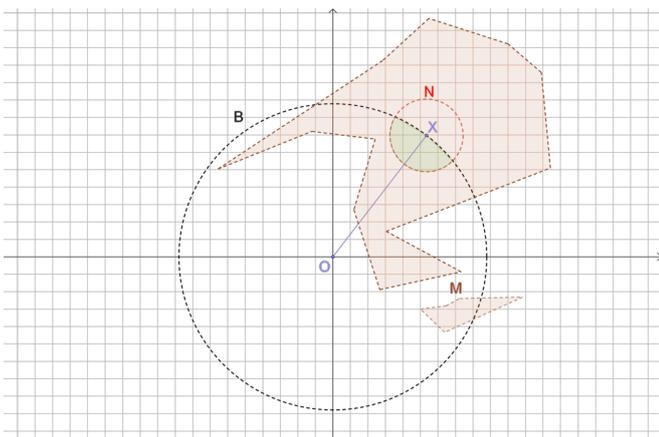


Figura 1: Ejemplo de la demostración del Corolario 2.2. Aquí M , en marrón, es una vecindad abierta de x que en general podría ser desconexa y $B = \{y \mid f(y) < f(x)\} = B_{\|x\|}(0)$. En verde se presenta la intersección conexa buscada.

Con argumentos análogos se puede probar el siguiente corolario.

Corolario 2.3. *Todo homeomorfismo local de S^n en si mismo es un homeomorfismo global siempre que $n \geq 2$.*

Ninguno de los dos resultados precedentes es nuevo, sin embargo para el caso del segundo la prueba usual (Spanier, 1966) está basada en el hecho de que S^n es simplemente conexo para $n > 1$, cuestión mucho más difícil de probar que la existencia de una función simple. En el caso del Corolario 2.2, se ha realizado la demostración en detalle, usando las sugerencias dadas por Katriel (1994).

El segundo tipo de aplicación del Teorema 2.1 se presenta a continuación.

Teorema 2.3 (Katriel, 1994). *Sea W un espacio topológico compactamente conexo y localmente conexo. Sea $X = S^1 \times W$. Entonces toda función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua y creciente al infinito posee un número infinito de mínimos locales o un punto de paso de montaña (o ambos)*

Como ejemplo tómesese $X = T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ (n veces). En específico T^2 , el clásico toro. Con $X = S^1 \times T^{n-1}$, el teorema se aplica y se concluye que toda función continua (como X es compacto toda función es creciente al infinito) $f : T^n \rightarrow \mathbb{R}$ posee un número infinito de mínimos locales o un punto de PM. Esto deja un problema abierto: si uno encontrase una función continua desde el toro a los reales sin puntos locales de PM, podría afirmar que toda función real continua definida en el toro posee un número infinito de mínimos locales; de igual forma si se encontrase una función continua con un número finito de mínimos locales se podría aseverar que toda función continua definida en el toro posee necesariamente al menos un punto de paso de montaña.

Observación 2.3. Como se puede apreciar, las aplicaciones del TPM topológico son meramente útiles en la propia topología, en especial en aquella referente a las superficies compactas y conexas de los espacios euclídeos, algo que se suele llamar aplicaciones teóricas. Usando el Teorema de alternativa (Teorema 2.1), que es bastante general, Katriel (1994) brinda algunas aplicaciones más en el estilo ya mostrado, para conjuntos tan simples como las bolas cerradas o tan complejos como el plano proyectivo. No se ha encontrado en la literatura aplicaciones más prácticas.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1 Aplicaciones en común de los teoremas de paso de montaña: el TPM en dimensión finita

Se puede inferir por lo expuesto por Ambrosetti y Rabinowitz (1973) la clara motivación en su afán de demostrar el TPM clásico: asegurar la existencia de soluciones débiles de EDPs semilineales elípticas. Por otro lado, Katriel (1994) buscaba probar teoremas de homeomorfismos, cuestión que resulta de gran importancia en la Topología General. Después de estudiarse ambas aplicaciones puede decirse que no poseen ninguna relación a simple vista. Sin embargo, resulta que existe otra aplicación de connotada relevancia que surge como uno de los puntos en común que se pueden encontrar para ambos contextos del TPM; esta aplicación es un teorema, en Teoría de Puntos Críticos en dimensión finita, que fue demostrado por primera vez por Courant (1950). Este teorema, que hoy se conoce como Teorema de Paso de Montaña en dimensión finita, puede considerarse la primera aproximación al tipo de demostración que poseen las otras dos versiones.

A continuación se presenta su enunciado. Struwe (2008) presenta una demostración asequible. La siguiente definición es necesaria.

Definición 3.1 (Función coerciva). Una función continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se dice coerciva si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

o en otras palabras, si

$$(\forall M > 0) (\exists R > 0) \text{ tal que } \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \|x\| > R \Rightarrow f(x) > M.$$

Teorema 3.1 (Teorema de Paso de Montaña en dimensión finita). *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional continuamente diferenciable (C^1) y coercivo. Si f tiene dos mínimos locales estrictos x_1 y x_2 , entonces tiene un tercer punto crítico x_3 tal que*

$$f(x_3) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Uno de los resultados más importantes de esta investigación es el hecho de que el TPM en dimensión finita es un corolario tanto del TPM clásico como del topológico, brindando así ese primer punto de encuentro entre los dos teoremas que puede hacer surgir cuestiones interesantes sobre las posibles relaciones teóricas y lógicas que puedan poseer y que se describen más adelante. A continuación se evidencia lo expuesto, a través de dos demostraciones originales.

Teorema 3.1 vía TPM clásico

Demostración. Sin pérdida de generalidad asúmase que $f(x_1) \geq f(x_2)$. Para poder aplicar el TPM clásico, es necesario definir el siguiente funcional:

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) = f(x+x_1) - f(x_1).$$

Por construcción, $g(0) = 0$. Es preciso mostrar que 0 y $x_2 - x_1$ son mínimos locales de g . Para el caso de 0 , se debe hallar $\delta_1 > 0$ tal que para todo $x \in B_{\delta_1}(0) \setminus \{0\}$, $g(x) > g(0)$. Como x_1 es mínimo local de f , entonces existe δ tal que si $x \in B_{\delta}(x_1) \setminus \{x_1\}$ entonces $f(x) > f(x_1)$. Si se toma $\delta_1 = \delta$, entonces, sea $x \in B_{\delta_1}(0) \setminus \{0\}$, o sea $\|x\| < \delta_1$, es decir $\|x+x_1-x_1\| < \delta$, que implica, al ser $x+x_1 \neq x_1$, $f(x+x_1) > f(x_1)$. Con ello

$$g(x) = f(x+x_1) - f(x_1) \\ > 0 \\ = g(0).$$

Ahora, para el caso de $x_2 - x_1$ es preciso mostrar que existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $x \in B_{\delta_2}(x_2 - x_1) \setminus \{x_2 - x_1\}$, $g(x) > g(x_2 - x_1)$. Como x_2 es mínimo local de f , entonces existe δ_0 tal que si $x \in B_{\delta_0}(x_2) \setminus \{x_2\}$ entonces $f(x) > f(x_2)$. Si se toma $\delta_2 = \delta_0$, entonces, sea $x \in B_{\delta_2}(x_2 - x_1) \setminus \{x_2 - x_1\}$, es decir $\|x - (x_2 - x_1)\| < \delta_2$, o sea $\|x+x_1-x_2\| < \delta_0$, que implica al ser $x+x_1 \neq x_2$, $f(x+x_1) > f(x_2)$. Con ello

$$g(x) = f(x+x_1) - f(x_1) \\ > f(x_2) - f(x_1) \\ = g(x_2 - x_1).$$

Como para todo $0 < \tilde{\delta} < \delta_1$, si $\|x\| = \tilde{\delta}$, $g(x) = \alpha > 0$ y como $g(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, en el contexto de la geometría de paso de montaña, basta tomar como ρ a cualquier $\tilde{\delta}$ positivo lo suficientemente pequeño para ser menor que δ_1 y $\|x_2 - x_1\|$ al mismo tiempo, cosa que es posible ya

que $\|x_2 - x_1\| > 0$. Luego, con $v = x_2 - x_1$, se tiene que el funcional g cumple con las proposiciones de la geometría de paso de montaña del TPM clásico. Ahora se necesita probar que g satisface (PS). Para ello, como ya se verá, basta evidenciar que g es coerciva. En primer lugar, se verifica que $h(x) = f(x+x_1)$ es coerciva, es decir

$$(\forall M > 0) (\exists R > 0) \text{ tal que } \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \|x\| > R \Rightarrow h(x) > M.$$

Sea $M > 0$. Si $x_1 = 0$ no habría nada que probar, así que se asume $x_1 \neq 0$, con lo cual $\|-x_1\| > 0$. Como f es coerciva, existe $R_1 > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| > R_1$, se tiene que $f(x) > M$. Sea $R = R_1 + \|-x_1\|$ y tómesese $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| > R$. Así,

$$\|x+x_1\| = \|x - (-x_1)\| \geq \|x\| - \|-x_1\| > R_1,$$

con lo cual $f(x+x_1) = h(x) > M$.

Se necesita ahora que para todo $c \in \mathbb{R}$, $h(x) + c$ sea coerciva, es decir

$$(\forall M > 0) (\exists R > 0) \text{ tal que } \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \|x\| > R \Rightarrow h(x) + c > M.$$

Sea $M > 0$. Si $c < M$, entonces $M - c > 0$, y como h es coerciva existe $R_1 > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| > R_1$ se tiene que $h(x) > M - c$, es decir $h(x) + c > M$; Basta tomar $R = R_1$. Si es que $c \geq M$, entonces $c > \frac{M}{2}$; se toma nuevamente $R = R_1$ y así, cuando $\|x\| > R$,

$$h(x) + c > h(x) + \frac{M}{2} > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M.$$

De esta forma y tomando $c = -f(x_1)$, se tiene que $g(x)$ es una función coerciva. A continuación, uno de los más interesantes resultados de este trabajo: que la coercividad implica el cumplimiento de (PS) para un funcional en dimensión finita.

Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Palais-Smale, es decir,

$$(g(x_n))_n \text{ es acotada y } g'(x_n) \rightarrow 0.$$

En primer lugar, se puede mostrar que $(x_n)_n$ es acotada: en efecto si esto no fuera cierto y la sucesión fuera no acotada, se tendría la existencia de una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente al infinito, es decir $\|x_{n_k}\| \rightarrow +\infty$ cuando $k \rightarrow +\infty$, lo que a su vez implicaría, gracias a la coercividad de g , que $g(x_{n_k}) \rightarrow +\infty$. Sin embargo esto contradice la acotación de $(g(x_{n_k}))_k$ que proviene de la acotación de $(g(x_n))_n$. En consecuencia $(x_n)_n$ debe ser acotada y al encontrarse en un espacio euclídeo de dimensión finita, poseer una subsucesión acotada, debido al Teorema de Bolzano-Weierstrass, obteniéndose (PS). Aplicando el TPM clásico se llega a la conclusión de que g posee un punto crítico, dígame x_0 , tal que $g(x_0) > 0$. Claramente,

$$g'(x) = f'(x+x_1).$$

Como $g'(x_0) = 0$, es fácil probar que $x_3 = x_0 + x_1$ es un punto crítico de f , pues

$$f'(x_0 + x_1) = g'(x_0) = 0.$$

Además

$$\begin{aligned} f(x_3) &= f(x_0 + x_1) \\ &= g(x_0) + f(x_1) \\ &> f(x_1) \end{aligned}$$

por el hecho de que $g(x_0) > 0$. Esto completa la demostración. \square

Teorema 3.1 vía TPM topológico

Demostración. \mathbb{R}^n es un espacio topológico regular, localmente conexo y compactamente conexo. Es preciso mostrar que f es creciente al infinito dado que es coerciva.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$; el objetivo es mostrar que existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, tal que para todo $z \notin K$ se tiene $f(z) > f(x)$. Procediendo por contradicción se tiene la siguiente proposición:

$$\forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto, } \exists z \notin K \text{ tal que } f(z) \leq f(x).$$

Sea $\delta > 0$; en dimensión finita el conjunto $B = \overline{B_\delta(0)}$ es compacto, por lo cual existe $z \notin B$ tal que $f(z) \leq f(x)$. Como $z \notin B$ entonces $\|z\| > \delta$, y por lo tanto se ha probado que

$$(\forall \delta > 0) (\exists z_\delta \in \mathbb{R}^n) \text{ tal que } (\|z_\delta\| > \delta \wedge f(z_\delta) \leq f(x)).$$

Así, como $1 > 0$, existe $z_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z_1\| > 1$ y $f(z_1) \leq f(x)$. Se conjetura que existe $z_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z_2\| > 2$, $\|z_2\| \geq \|z_1\|$ y $f(z_2) \leq f(x)$. Para probar esto, por contradicción se asume que para todo $z \in \mathbb{R}^n$, $\|z\| \leq 2$ o $\|z\| < \|z_1\|$ o $f(z) > f(x)$. Como $2 > 0$, entonces existe $z_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z_2\| > 2$ y $f(z_2) \leq f(x)$; lo que implicaría que $\|z_2\| < \|z_1\|$; a su vez se tendría obligadamente que $\|z_1\| \leq 2$, brindando la contradicción $2 < \|z_2\| < \|z_1\| \leq 2$. Procediendo por inducción es posible encontrar la sucesión $(z_n)_n$ en \mathbb{R}^n tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|z_n\| > n$, $\|z_n\| \geq \|z_{n-1}\|$ y $f(z_n) \leq f(x)$. La sucesión de normas es creciente y no acotada y por lo tanto diverge a infinito ($\|z_n\| \rightarrow +\infty$). La coercividad de f implicaría que $f(z_n) \rightarrow +\infty$, cuestión que contradice que $f(z_n) < f(x) < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma se prueba que f es creciente al infinito, siendo vital que el espacio sea de dimensión finita.

Utilizando el Corolario 2.1 del TPM topológico se asegura la existencia de un vector $x_3 \in \mathbb{R}^n$ que es un punto mínimo o punto global de paso de montaña con la propiedad que $f(x_3) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. En caso de que fuera un punto mínimo es claro que se trata de un punto crítico. ¿Qué pasa en el caso de que sea un punto global de PM? Katriel (1994) demuestra con argumentos topológico-diferenciales, lo siguiente.

Lema 3.1 (Katriel, 1994). *Si X es un espacio de Banach, $U \subset X$ es abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es C^1 y $x \in U$ es tal que $f'(x) \neq 0$, entonces existe una bola abierta $B \subset X$ con centro en 0 , un difeomorfismo $H : B \rightarrow H(B) \in U$ con $H(0) = x$ y un funcional lineal L en X tal que $f(H(w)) = L(w) + f(x)$ para $w \in B$. De hecho se puede escoger $L = f'(x)$ y H tal que $H'(0) = I$, donde I es la función identidad en X .*

Este lema muestra que cerca de un punto regular, es decir un punto que no es crítico, una función suave se ve topológicamente como una función lineal no trivial. Sin embargo, como

las funciones lineales no poseen puntos de PM (Katriel, 1994), entonces se tiene que un punto regular no puede ser de PM. Por lo tanto todo punto de PM debe ser necesariamente un punto crítico.

Así se llega a la conclusión de que el TPM topológico implica el TPM en dimensión finita. \square

3.2 Elementos teóricos en común de la estructura de demostración de las distintas variantes del TPM

Si se toman en cuenta las tres últimas hipótesis del TPM clásico: que I es tal que $I(0) = 0$ y la existencia de ρ y α tales que satisfacen 1. y 2. (la geometría de paso de montaña), puede verse (como muestra el esquema de demostración) que éstas son las responsables de que exista una clase de minimax α -admisibles. De hecho, es posible probar (Rabinowitz, 1986) que dicha clase es

$$\Gamma_1 = \{\Sigma \in E \mid \Sigma \text{ es compacto y conexo con } 0, v \in \Sigma\},$$

clase análoga a la del TPM topológico, es decir,

$$\Gamma_2 = \{\Sigma \in X \mid \Sigma \text{ es compacto y conexo con } x_1, x_2 \in \Sigma\},$$

cuya admisibilidad topológica se obtiene gracias a las tres últimas hipótesis de dicho caso: que f es creciente al infinito y que existen $x_1, x_2 \in X$ y $S \subset X$ que satisfacen las condiciones 1. y 2. (del TPM topológico, evidentemente). Una vez obtenidas estas admisibilidades en su respectivo contexto, son los *Principios de Minimax* (paso 2 de cada esquema de demostración) de cada caso los que garantizan en realidad la existencia de los puntos críticos (o puntos de mínimo o puntos de PM).

Esto evidencia que en ambas versiones del TPM sus hipótesis pueden ser separadas en dos grupos: hipótesis de estructura del espacio e hipótesis geométricas del funcional. Éstas últimas hacen referencia a aquellas ‘tres últimas hipótesis’ que sirven para que las clases de minimax sean admisibles en su contexto. Por otro lado las hipótesis de estructura del espacio son las que determinan que exista el punto crítico (o mínimo local o punto de PM) al actuar sobre estas clases admisibles; en el teorema clásico, la estructura está dada por el hecho de que el espacio sea de Banach y que $I \in C^1(\Omega)$ satisfaga (PS). En el caso topológico, la estructura se encuentra dada por las propiedades de conexidad local, compacidad local y conexidad compacta de f más el hecho de que $f \in C(X)$.

Con respecto a los puntos cuya existencia garantizan los teoremas, a parte de poder mostrar que se alcanzan a un nivel en una clase de minimax muy parecida, existe una relación muy interesante: por un lado, y como ya se vio, todo punto de paso de montaña en un espacio dotado de estructura diferencial es un punto crítico (y obviamente todo punto de mínimo lo es), pero por si esto fuera poco el punto crítico cuya existencia asegura el TPM clásico es un punto de mínimo local o un punto de paso de montaña (Struwe, 2008). Esto implica que ambos teoremas brindan la existencia de la misma clase de punto: un punto de mínimo o un punto de paso de montaña.

Es interesante, por otro lado, que la demostración de estos principios se haga por el método indirecto de reducción al

absurdo, siendo la contradicción exactamente la misma: encontrar un conjunto en la clase de minimax que contradice la definición del nivel de minimax: en el caso clásico esto es gracias al Teorema de Deformación y en el topológico se debe a propiedades topológicas exclusivamente, como se advierte en los esquemas de demostración (paso 1).

En base a esta estructura análoga de los teoremas se vuelve interesante investigar si hay contextos en los cuáles resultan relacionadas las dos versiones en el sentido lógico, es decir responder las preguntas ¿implica el TPM clásico al TPM topológico? o ¿implica el TPM topológico al TPM clásico?

3.3 Relaciones lógicas

Para poder iniciar la comparación de hipótesis de las dos versiones del teorema, que permitirían responder los cuestionamientos del final de la sección anterior, en primer lugar es necesario poner a éstas en el mismo contexto estructural, es decir, hacer del espacio topológico X un espacio de Banach E , e introducir la hipótesis de diferenciabilidad continua en la función f . Una vez allí salta a la vista la incompatibilidad de las hipótesis debido al siguiente resultado atribuido usualmente a Augustin Louis Cauchy y cuya demostración se puede encontrar en Köthe (1969).

Teorema 3.2. *Sea X un espacio vectorial topológico. X es localmente compacto si y solo si X es de dimensión finita.*

La razón por la cual este resultado es un impedimento en el afán de conectar los teoremas se detalla a continuación.

En primer lugar si se quiere utilizar el TPM clásico para mostrar el topológico, se debe buscar que las hipótesis de éste último impliquen las del primero; sin embargo, una de aquellas es que la función continua f es creciente al infinito, lo que a su vez implica que el espacio es de dimensión finita, cuestión no contradictoria pero que reduce notablemente el marco referencial al cual se pretende llevar la comparación.

Si por otro lado se desea utilizar el TPM topológico para mostrar el clásico, al momento de asumir que el funcional I satisface (PS) y buscar que sea además creciente al infinito, se tiene una contradicción puesto que si lo fuese, el espacio debería ser de dimensión finita, cuestión que no necesariamente es verdad, entre otras cosas porque si existen funcionales que satisfacen (PS) definidos en espacios de dimensión infinita como aquel que se expuso en la sección de las aplicaciones del TPM clásico (definido en $H_0^1(\Omega)$).

¿Qué pasaría sin embargo si para comparar las hipótesis se restringen los teoremas al caso en dimensión finita, en dónde es irrelevante el teorema de Cauchy?

3.3.1 ¿El TPM clásico implica al TPM topológico?

Con la salvedad de estar trabajando en $X = E = \mathbb{R}^n$, donde la conexidad local y compacta así como la compacidad local se tienen por descontado, si se verifican las hipótesis del TPM topológico, el objetivo es ver hasta qué punto las hipótesis del

TPM clásico se cumplen, para así poder aplicarlo y al obtener un punto crítico que es un mínimo o punto de PM, demostrar el TPM topológico. Sin embargo, ese procedimiento no es posible en general, como muestra el siguiente contraejemplo. Considérese la función

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -e^{-(x+2)^2/2} - e^{-(x-2)^2/8}$$

El primer punto de mínimo local de esta función es $x_1 \approx -1,99452$ con imagen $y_1 \approx -1,00034$. Con lo cual, la traslación

$$f(x) = g(x + x_1) - y_1$$

posee un punto de mínimo en 0 y $f(0) = 0$. Además $\sup_{\mathbb{R}} f = -y_1$.

Como se muestra en la Figura 2, f posee dos mínimos locales, lo que implica que satisface las hipótesis geométricas del TPM topológico, porque además es creciente al infinito; para ver esto, considérese que si $x \in [-6, 6]$ si se toma $K = [-6, 6]$, entonces para cualquier $z \notin K$ se tiene que $f(z) > f(x)$. Si $x < -6$ o $x > 6$ basta tomar $K = [x, -x]$ o $K = [-x, x]$ respectivamente para obtener el resultado. Así, esta función satisface todos los requerimientos del TPM topológico y de hecho también las hipótesis geométricas del TPM clásico (ya que posee un mínimo estricto en 0 y $f(0) = 0$ y tiene otro punto de mínimo con imagen menor a cero). Por otro lado, es claro que el funcional es continuamente diferenciable. Sin embargo f no satisface (PS) como se muestra a continuación. La sucesión $(x_k)_k$ definida por $x_k = k$ es de Palais-Smale para f , pues $(f(x_k))_k$ es acotada (de hecho $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = -y_1$) y además $\lim_{k \rightarrow +\infty} f'(x_k) = 0$ (para ver esto sólo hace falta darse cuenta que f no es más que una función gaussiana bimodal invertida y trasladada); sin embargo, dicha sucesión no posee una sucesión convergente pues $x_k \rightarrow +\infty$. Así que el cumplimiento de las hipótesis del Teorema topológico no necesariamente implica el cumplimiento de las hipótesis del TPM clásico.

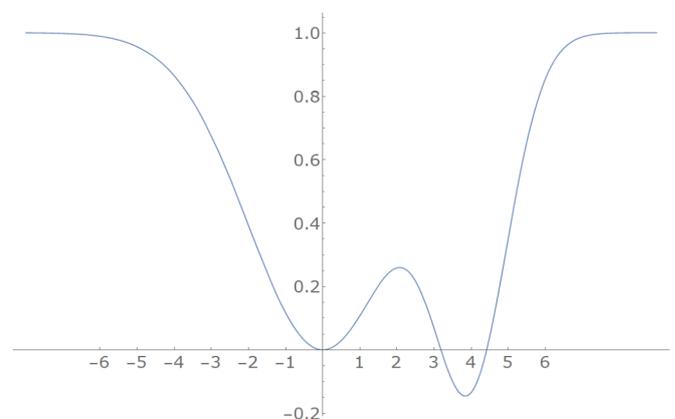


Figura 2: Gráfica de la función f de fórmula $f(x) = -e^{-(x+x_1+2)^2/2} - e^{-(x+x_1-2)^2/8} - y_1$, donde se aprecia como ésta cumple con las hipótesis del TPM topológico.

3.3.2 ¿El TPM topológico implica al TPM clásico?

Suena razonable y tentadora la posibilidad de probar que el TPM topológico es una generalización del TPM clásico para espacios de Banach. Nuevamente, en el caso finito dimensional, donde todas las condiciones de espacio topológico (conexidad local, compacidad local, y conexidad compacta) se cumplen, si se suponen satisfechas todas las hipótesis del TPM clásico, ¿hasta qué punto se cumplen las hipótesis del TPM topológico con el fin de aplicarlo? Para empezar, es interesante que las hipótesis geométricas clásicas si implican las hipótesis geométricas topológicas pues $S = \partial B_\rho(\bar{0})$ separa a 0 y v y $p = \inf_{u \in S} I(u) \geq \alpha \geq \max\{I(0), I(v)\}$. Sin embargo, la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 - \cos(x),$$

que al tener un mínimo en 0 y otro en 2π satisface las hipótesis geométricas (pues $f(0) = 0$), es una función continuamente diferenciable que satisface (PS) pero no es creciente al infinito. Para verificar que satisface (PS), supóngase que $(x_k)_k \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de Palais-Smale para f , es decir, las sucesión $(f_k)_k$ es acotada y la sucesión $(f'(x_k))_k$ converge a cero. Esto último implica que

$$\sin(x_k) \rightarrow 0,$$

que por continuidad implica que

$$x_k \rightarrow \arcsin(0) = 0,$$

brindando la convergencia de la arbitraria sucesión $(x_k)_k$, que prueba lo buscado.

Para probar que f no es creciente al infinito basta probar que existe algún número real x tal que para todo $K \subset \mathbb{R}$ compacto exista un número real $z \notin K$ tal que $f(z) \leq f(x)$. Sea $x = \pi$ y sea un compacto $K \subset \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo. Como K es compacto, entonces es acotado, es decir, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $y \leq C$ para todo $y \in K$. Ahora, gracias a la propiedad arquimediana de los números reales, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\pi > C$, con lo cual $n\pi \notin K$; si se toma $z = n\pi$, entonces

$$f(z) = f(n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 2 & \text{si } n \text{ es impar;} \end{cases}$$

en cualquier caso,

$$f(z) \leq 2 = f(\pi) = f(x),$$

probando que f no es creciente al infinito, hecho que se puede corroborar también al evidenciar que f es oscilante. Se presenta su gráfica en la Figura 3.

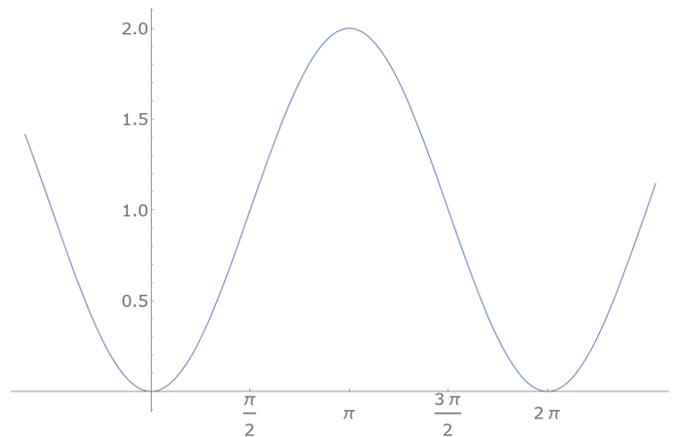


Figura 3: Gráfica de la función f de fórmula $f(x) = 1 - \cos(x)$, donde se aprecia como ésta cumple con las hipótesis geométricas del TPM clásico.

Aunque hubiera resultado de lo más interesante que el teorema topológico fuese una generalización del teorema clásico (aunque sea en un contexto reducido), el hecho de que no lo sea no resulta nada decepcionante porque implica que el TPM en dimensión finita puede ser demostrado a través de dos métodos que son realmente diferentes en fondo: dos maneras independientes de llegar al mismo resultado, que aunque guardan relación estrecha en estructura superficial, representan esquemas de conocimiento de dos ramas de la matemática relativamente alejadas, que utilizan sus propios conceptos y definiciones de manera idónea para lograr sus propios objetivos (aplicaciones de uno y otro) y que, *anecdóticamente*, pueden demostrar un teorema de otro ramo.

4. CONCLUSIONES

Independencia lógica

La intención de encontrar relaciones lógicas entre los dos teoremas ha supuesto una tarea sumamente interesante que ha arrojado tal vez el más revelador resultado de este trabajo: que los teoremas estudiados representan dos resultados de naturaleza matemática lógicamente independiente, cuestión que no es trivial pues por sus características estructurales análogas se podía intuir alguna relación en el sentido lógico.

Como se ha advertido, la independencia lógica de ambos resultados posee interés teórico al momento de estudiar su contexto de demostraciones sumamente parecidas, pero asimismo se puede encontrar un interés práctico al saber que en el contexto de la teoría de puntos críticos en dimensión finita se cuenta con dos herramientas distintas para resolver problemas específicos en la búsqueda de dichos puntos.

Hipótesis principal

En la estructura de la demostración del TPM clásico la condición de Palais-Smale (PS) impuesta sobre el funcional resulta un pilar fundamental en la búsqueda del punto crítico. De igual manera en la estructura de la demostración del TPM topológico el crecimiento al infinito es de esencial relevancia

para encontrar el punto de mínimo o punto de paso de montaña. Aunque en el primer caso la condición (*PS*) —como hipótesis de estructura— es necesaria en el Principio de Minimax correspondiente y en el segundo caso el crecimiento al infinito forma parte de las hipótesis geométricas, una vez encuadrados en espacios de dimensión finita (donde se equiparan el resto de hipótesis de estructura del espacio) y si se acomodan los puntos mínimos para que las condiciones geométricas en ambos teoremas sean equivalentes, son únicamente esas dos condiciones las que diferencian a los resultados (siempre que se acepte que la función es continuamente diferenciable en el caso del TPM topológico).

Se ha visto, sin embargo, que dichas hipótesis no son equivalentes con los contraejemplos brindados. Es por eso que resulta natural decir que la hipótesis principal del TPM clásico es el cumplimiento de la condición de Palais-Smale mientras que para el TPM topológico resulta el crecimiento al infinito.

Esencia de las demostraciones

Más allá de la clara relación que guardan los teoremas en su estructura de demostración —relación estrecha en vista de la conexión que tienen las familias de minimax, la utilización de dos puntos del espacio dotados de cierta geometría muy parecida y el procedimiento por reducción al absurdo— y el hecho de que ambos garantizan la existencia de un punto mínimo o punto global de paso de montaña para un funcional, se puede evidenciar que resultan en fondo muy distintas: mientras en el caso clásico todo está construido con el objeto de recurrir al Teorema de Deformación —que a su vez es un resultado que se alimenta de la estructura diferencial del espacio y que es el principio motor del TPM clásico— en el caso topológico, es el sistema de conceptos de la topología general el que por sí solo carga con el peso de la demostración. No quiere decir esto que en el TPM clásico no se utilice la topología sino que ésta se encuentra acompañada de consideraciones diferenciales exclusivas de los espacios de Banach, mientras que en el otro caso la generalidad de las consideraciones topológicas es sumamente amplia.

Aplicaciones incompatibles

La motivación para el descubrimiento del TPM clásico fue la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, cuestión por la cual es célebre; como para tal aplicación los espacios funcionales donde se trabaja son de dimensión infinita, resulta imposible querer usar al TPM topológico en la misma línea de aplicaciones. Esta evidente consideración no es irrelevante ya que la investigación actual en el campo de las EDPs en la búsqueda de generalizaciones del TPM intenta alcanzar resultados de este tipo que no precisen de las hipótesis usuales; algunas, por un lado, tratan de deshacerse de la condición de Palais-Smale, cuestión de la que el TPM topológico carece, por ejemplo. Sin embargo resulta difícil no utilizar dicha hipótesis aunque existen algunos ejemplos (Jabri, 2003).

Por otro lado, en la búsqueda de generalizaciones del TPM clásico podemos citar a Chang (1981) que estudia métodos variacionales para funcionales no diferenciables, utilizados por

Arcoya y Calahorrano (1994) con el fin de resolver algunos problemas discontinuos en EDP. Brezis y Nirenberg (1983) empiezan a dar luz sobre la resolución de ecuaciones diferenciales semilineales en el caso del exponente crítico. Se debe mirar también los trabajos de Brezis (1986) y Bahri y Coron (1988). Asimismo, Katriel (1994) presenta una generalización del TPM clásico en espacios métricos. Una generalización a espacios topológicos está por descubrirse aún.

De igual manera resulta bastante complejo interpretar el TPM clásico de tal forma que pueda utilizarse en la búsqueda de aplicaciones en Topología, principalmente porque muchos espacios topológicos (como las superficies conexas y compactas para las cuales el TPM topológico posee resultados) ni siquiera son espacios vectoriales, mucho menos espacios de Banach.

Dimensión finita

La incompatibilidad de las aplicaciones principales de cada uno de los teoremas hace mucho más interesante a la aplicación en común más importante: el TPM en dimensión finita. La forma de demostrarlo usando las otras dos variantes, sección que ha representado una de las partes más interesantes de este trabajo, evidencia como la propiedad de coercividad representa más de lo que se ve a primera vista, siempre y cuando se esté trabajando en dimensión finita.

En ese contexto, es interesante que al querer buscar puntos críticos para funciones que poseen dos puntos de mínimo estricto, se tenga como opción para encontrarlos a la verificación de tres distintas cuestiones, que en uno u otro caso resultarán más o menos fáciles de verificar: la coercividad (la más general porque implica las otras dos), el crecimiento al infinito o la condición (*PS*). Esto brinda una riqueza única a las técnicas de búsqueda de puntos críticos en dimensión finita.

AGRADECIMIENTOS

El segundo autor agradece a la Escuela Politécnica Nacional por el financiamiento dado a su investigación a través del proyecto PIS 17-01.

REFERENCIAS

- Ambrosetti, A. (1992). *Critical points and nonlinear variational problems*. Mémoires de la Société Mathématique de France, Serie 2, No. 49.
- Ambrosetti, A. y Malchiodi, A. (2007). *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems* (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press.
- Ambrosetti, A. y Rabinowitz, P. (1973). Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis*, 14(4), 349–381. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(73\)90051-7](https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7)

- Arcoya, D. y Calahorrano, M. (1994). Some Discontinuous Problems with a Quasilinear Operator, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 187 (3), 1059-1072. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1406>
- Badiale, M y Serra, E. (2011). *Semilinear elliptic equations for beginners. Existence results via the variational approach*. London, UK: Springer.
- Bahri, A. y Coron, J. M. (1988). On a nonlinear elliptic equation involving the critical sobolev exponent: The effect of the topology of the domain. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41 (3), 253-294.
- Brezis, H. (1986). Elliptic equations with limiting Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39, 517-539.
- Brezis, H. y Nirenberg, L. (1983). Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 36 (4), 437-477. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160360405>
- Chang, K. C. (1981). Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 80 (1), 102-129. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(81\)90095-0](https://doi.org/10.1016/0022-247X(81)90095-0)
- Courant, R. (1950). *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*. Heidelberg, Germany: Verlag.
- Evans, L. (2010). *Partial differential equations* (2nd ed). Providence, RI, USA: American Mathematical Society.
- Jabri, Y. (2003). *The mountain pass theorem. Variants, generalizations and some applications*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Katriel, G. (1994). Mountain pass theorems and global homeomorphism theorems. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 11 (2), 189-209.
- Köthe, G. (1969). *Topological vector spaces* (Traducido del alemán por D. J. H. Garling). New York, USA: Springer-Verlag New York Inc.
- Rabinowitz, P. (1986). *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations* (CBMS Regional Conference Series in Mathematics) Providence, RI, USA: American Mathematical Society.
- Spanier, E. (1966) *Algebraic topology*. New York-Toronto, Ont.-London: McGraw-Hill Book Co.,
- Struwe, M. (2008) *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems* (4th ed). Berlin, Germany: Springer-Verlag.

BIOGRAFÍAS



Miguel Alejandro Aguilar Enríquez, obtuvo el Diploma del Bachillerato Internacional (Unidad Educativa Sebastián de Benalcázar, 2012) realizando una monografía sobre las aplicaciones de la Matemática en la Biología. A partir de ese momento supo que quería dedicarse a la ciencia formal por excelencia y se graduó de matemático en la Escuela Politécnica Nacional en 2019. Durante su carrera trabajó como ayudante de cátedra en la Facultad de Ciencias y, una vez titulado, se ha desempeñado como Técnico Docente en el Departamento de Matemática de la EPN. Está interesado en el Análisis Matemático, la Topología General, la Literatura de Ciencia Ficción y el Cómic Independiente. Identificador digital ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6398-0446>.



Marco Vinicio Calahorrano Recalde, matemático de la Escuela Politécnica Nacional (EPN, 1985), hizo el curso de perfeccionamiento en matemática, bajo la dirección del Prof. Antonio Ambrosetti, en la legendaria e ilustre Scuola Normale Superiore di Pisa (1988-1991). Doctor en matemática (PhD), EPN-2009, con tesis dirigida por L. Boccardo, Universidad La Sapienza. Inicia su trabajo en la EPN en 1981 y actualmente es profesor titular, principal. Desempeñó las funciones de Jefe del Departamento de Matemática, Coordinador de las carreras de Matemática e Ing. Matemática, Subdecano y Decano de la Facultad de Ciencias de la EPN. Se interesa del Análisis no lineal. Identificador digital ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5710-1393>.

Diseño e Implementación de una Plataforma Informática CLOUD/GIS de Gestión, Operación y Control de Sistemas Fotovoltaicos de Iluminación

Vargas, Carlos¹ ; Guamán, Jesús¹ ; Rodríguez, Katherine¹ ; Ríos, Alberto¹ 

¹Universidad Técnica de Ambato, Facultad de Ingeniería en Sistemas, Electrónica e Industrial, Ambato, Ecuador

Resumen: En el presente artículo se describe el diseño, simulación e implementación de un prototipo de gestión, operación y control de un sistema de iluminación fotovoltaico desde una plataforma Cloud/GIS. La plataforma Cloud/GIS regula la intensidad lumínica de diferentes luminarias LED interconectadas y visualizadas en un Sistema de Información Geográfico, GIS. El prototipo electrónico de iluminación LED se instaló en la Universidad Técnica de Ambato. El prototipo de control automático de iluminación se programa para dos formas de funcionamiento: los días de lunes a viernes, y los sábados y domingos. Asimismo, se propone una metodología de análisis del impacto económico y medioambiental, asociado a la implementación de una plataforma de gestión, operación y control de sistemas fotovoltaicos de iluminación. Finalmente, se realizó un análisis comparativo del impacto económico y medioambiental de sistemas convencionales de alumbrado público, sin ningún tipo de control de luminosidad, frente a un sistema de alumbrado público integrado a una plataforma Cloud/GIS de gestión, operación y control de luminarias LEDs.

Palabras clave: Alumbrado público, Cloud Computing, control, GIS, iluminación fotovoltaica, LEDs.

Design and Implementation of CLOUD/GIS Platform for Management, Operation and Control of Photovoltaic Lighting Systems

Abstract: This article describes the design, simulation and implementation of a prototype for the management, operation and control of a photovoltaic lighting system from a Cloud / GIS platform. The Cloud / GIS platform controls the luminosity level of LED luminaires and integrates a Geographic Information System, GIS. The electronic prototype of LED lighting was installed at the Technical University of Ambato. The automatic lighting control prototype is programmed for two forms of operation: the days from Monday to Friday, and Saturdays and Sundays. Likewise, a methodology for analyzing the economic and environmental impact associated with the implementation of a platform for the management, operation and control of photovoltaic lighting systems is proposed. Finally, a comparative analysis of the economic and environmental impact of conventional public lighting systems was carried out, without any control of luminosity, in front of a public lighting system integrated to a Cloud / GIS platform for the management, operation and control of LED luminaires.

Keywords: Public lighting, Cloud Computing, Control, Photovoltaic Lighting, LEDs.

1. INTRODUCCIÓN

El servicio de Cloud Computing como plataforma informática es una tecnología que permite al usuario disponer de aplicaciones informáticas propias y personalizadas en la infraestructura de la nube, sin necesidad de grandes y costosas instalaciones, y un acceso seguro a la información

desde cualquier parte del mundo, únicamente, con una conexión a internet (Morales, M. F., 2012).

En el presente artículo se propone integrar los servicios Cloud Computing con aplicaciones GIS en una arquitectura multitareas y multipropósitos denominada Cloud/GIS. En este sentido, se pueden crear aplicaciones web para el manejo de información de manera geográfica, desde la nube. Asimismo, facilita la localización de diferentes flujos de trabajo en una amplia gama de procesos e industrias. Entre las diferentes aplicaciones desplegadas por los sistemas GIS interconectados a internet destacan: inventario de árboles e

*a.rios@uta.edu.ec
 Recibido: 25/09/2018
 Aceptado: 04/05/2020
 Publicado: 31/05/2020
 10.33333/tp.vol45n2.02
 CC BY 4.0

inspección de trabajos forestales, gestión de recursos hídricos y cuencas hidrográficas, seguridad pública y respuesta de emergencias, obras viales, ciudades inteligentes, mapas públicos de la ciudad, etc. (Manzano, S., Peña-Ortiz, R., Guevara, D., & Ríos, A. 2014; Rodríguez, N. R., Murazzo, M. A., Chávez, S. B., & Guevara, M. J., 2014; Segura, A. A. 2016; Gómez Delgado, M., 2016).

Por otra parte, existen trabajos asociados a innovadoras plataformas de comunicaciones y tecnologías de la información que incluyen nuevos elementos en su estructura (Guamán, J. I., Vargas, C. L., García, M. G., & Ríos, A. 2017; Vargas, C., Guamán, J., Nogales, R., & Ríos, A. 2017).

Las plataformas Cloud permiten consultar datos y visualizar información de manera remota, una de las funcionalidades de las plataformas Cloud es su fácil y amplia capacidad de expansión e integración de información por ejemplo sistemas fotovoltaicos de generación eléctrica (Guamán, J., Guevara, D., Vargas, C., Ríos, A., & Nogales, R. 2017; Manzano, S., Peña, R., Guevara, D., & Ríos, A. 2014).

Además, las plataformas Cloud/GIS son herramientas óptimas para la gestión, operación y control de los sistemas de iluminación públicos. El objetivo de implementar plataformas Cloud/GIS en los sistemas de iluminación públicos se aplica la optimización de la gestión del alumbrado, así como la reducción del consumo de energía y las emisiones contaminantes. Las plataformas Cloud/GIS han incursionado en el mundo de los negocios definiéndose como un modelo de prestación de servicios, permitiendo a los usuarios acceder a los diferentes servicios y necesidades de una forma sencilla y flexible. Cloud/GIS es una herramienta informática gestionada desde la web, con un coste económico de operación mínimo. Además, el acceso al control y manejo de la información es bastante sencilla (Pisu, C., & Casu, P., 2013). La aplicación de las herramientas Cloud/GIS en la gestión, operación y control de los sistemas de iluminación pública es un tema que despierta un gran interés tanto para las empresas desarrolladoras de software como para las compañías eléctricas y los organismos públicos (Dangermond, J., 2012; Mahmoud, E., Hegazy, O., & El-Dien, M. N., 2013; Ríos, A., Vargas, C., Guamán, J., & Rodríguez, K. 2017).

Actualmente, las investigaciones asociadas a las plataformas de control de sistemas de iluminación se centran en la implementación de técnicas de control del flujo luminoso de las luminarias, así como la aplicación de innovadoras tecnologías de adquisición y transmisión de la información. En los siguientes párrafos se describen algunos de los más innovadores sistemas de gestión, operación y control.

- En el año 2016, en Chicago, Estados Unidos, el Departamento de Ciencias de la Computación del Instituto de Tecnología implementó un sistema de iluminación público basado en una red inalámbrica y

tecnología de control centralizado, como una aplicación para ciudades inteligentes, con el objetivo de reducir costos de energía y mejorar la seguridad pública. El sistema piloto de control de iluminación integra 18 luminarias inteligentes en una red tipo malla. Las luminarias tienen la capacidad de enviar información acerca de su consumo actual, luminosidad y potencia. Asimismo, se puede controlar el porcentaje de atenuación de las luminarias en incrementos de 10% a través de una API, Application Programming Interface (Jin, D., Hannon, C., Li, Z., Cortes, P., Ramaraju, S., Burgess, P. & Shahidehpour, M. 2016). La Figura 1, muestra el esquema del sistema piloto de iluminación propuesto.

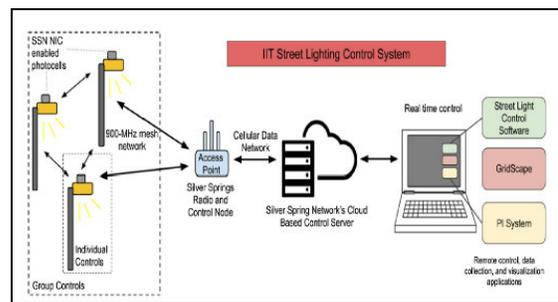


Figura 1: Sistema piloto centralizados de iluminación público (Jin, D., Hannon, C., Li, Z., Cortes, P., Ramaraju, S., Burgess, P. & Shahidehpour, M. 2016)

- En el año 2016, en Calicut, India, el Departamento de Diseño de Sistemas Embebidos, NIELIT, presentó el diseño e implementación de un sistema integrado de control de iluminación para incrementar el ahorro energético en el alumbrado público. El sistema propuesto utiliza sensores infrarrojos para encender las luminarias al momento de detectar la aproximación de vehículos. La propuesta se implementó en un sistema integrado de control de iluminación público y se basa en la detección de vehículos y/o cualquier otro obstáculo. La información en tiempo real del estado de las luminarias se encuentra desarrollada en una Plataforma de Conectividad Inteligente, PCI, y puede ser visualizada en cualquier momento (Parkash, Prabu V, Dandu Rajendra, 2016). La Figura 2, muestra el diagrama de bloques empleado para el desarrollo del sistema de inteligente de iluminación público basado en una Plataforma de Conectividad Inteligente.

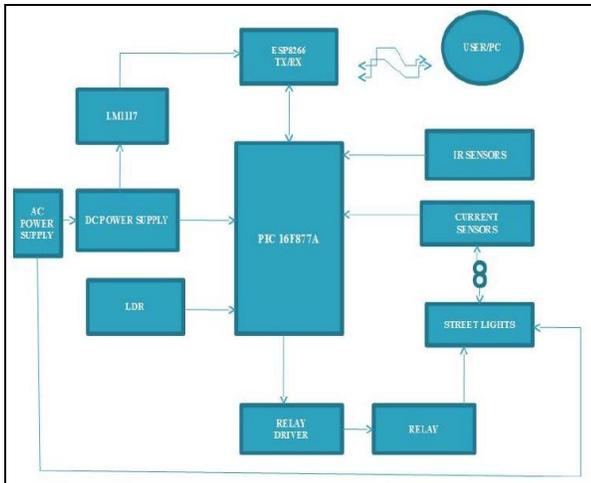


Figura 2: Diagrama de bloques del sistema inteligente de iluminación público basado en una Plataforma de Conectividad Inteligente (Parkash, Prabu V, Dandu Rajendra, 2016).

- En el año 2016, en Bangalore, Karnataka India, se desarrolló un prototipo automatizado para el control de un sistema de iluminación pública de luminarias LED. El prototipo desarrollado se centra en la integración de la tecnología denominada Internet de las Cosas, IoT, que controla la intensidad luminosa de las luminarias, con ayuda de un sistema electrónico de conmutación, en función de la cantidad de luz natural y de una programación temporizada de actividades. Los sensores empleados se conectan de forma remota a internet y los datos registrados se almacenan para su análisis y visualización (Soni, Soni, & Annapurna, 2016).
- Finalmente, se presenta un análisis comparativo de un sistema de iluminación convencional frente al nuevo prototipo de iluminación propuesto, que integra un sistema de control de la intensidad luminosa de las luminarias LED (Jin, D., Hannon, C., Li, Z., Cortes, P., Ramaraju, S., Burgess, P., & Shahidehpour, M., 2016). La figura 3, muestra el diagrama de bloques del sistema propuesto.

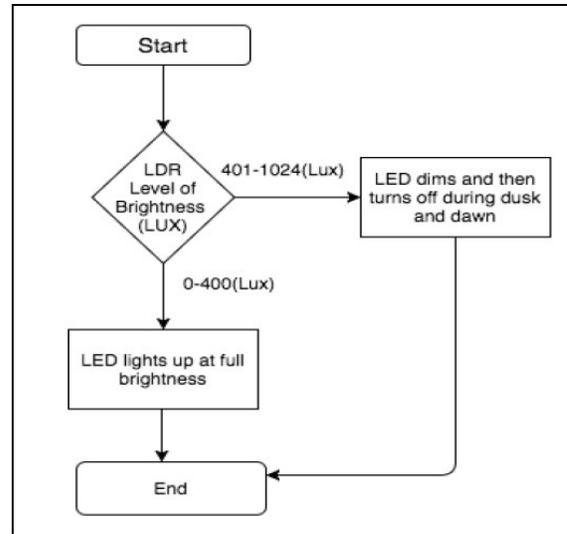


Figura 3: Diagrama de bloques del sistema de control remoto automatizado de luminarias LED (Jin, D., Hannon, C., Li, Z., Cortes, P., Ramaraju, S., Burgess, P., & Shahidehpour, M., 2016).

2. PROTOTIPO DE CONTROL DE ILUMINACIÓN DESDE UNA PLATAFORMA CLOUD/GIS.

El desarrollo del prototipo propuesto se realizó en función de las siguientes etapas:

- Descripción general del funcionamiento del prototipo.
- Diseño del circuito de control de intensidad.
- Programación del microcontrolador.
- Implementación y validación del circuito regulador.
- Sistema de comunicación inalámbrica.
- Diseño y programación de la interfaz web.
- Integración del sistema de información geográfica, GIS.

2.1. Descripción General del Prototipo.

Las plataformas Cloud permiten la integración de diferentes tecnologías de comunicación. Una de las tecnologías más robustas y altas prestaciones es la comunicación inalámbrica (Manzano, S., Peña, R., Guevara, D., & Ríos, A. 2014; Manzano, S., Guevara, D., & Ríos, A. 2015)

En la Universidad Técnica de Ambato se ha implementado una plataforma Cloud/GIS de control de sistemas renovables de iluminación, basados en tecnología LED, con control inteligente del flujo luminoso. El prototipo controla una luminaria LED de 24 W de potencia nominal.

El control de iluminación se puede realizar de forma manual o de forma automática, con ayuda de un sensor detector de luz natural que determina el inicio del funcionamiento del sistema de iluminación. El funcionamiento de la plataforma Cloud/GIS se basa en el control del porcentaje de iluminación a diferentes horas por medio de un control por modulación de ancho de pulso, en inglés PWM (Pulse Width

Modulation). La modulación por ancho de pulso controla la corriente del LED. Además, se realiza la adquisición y tratamiento de la información de la operación del sistema de iluminación para su posterior visualización y análisis. Asimismo, se incluye un sensor de presencia que maximiza la intensidad luminosa al detectar la presencia de personas.

La propuesta tiene como aspecto innovador la integración de un Sistema de Información Geográfica, GIS, de la ubicación de luminarias LED en una plataforma Cloud, que permite la gestión, operación y control en diferentes zonas del sistema de alumbrado público. La programación de la plataforma Cloud se realiza con ayuda de hardware y software libre, mientras que la programación de la interfaz web se basa en lenguaje PHP. El control del nivel de iluminación se realiza con ayuda de un microcontrolador, que trabaja en función de la información de presencia y nivel de iluminación natural. En la Figura 4, se presenta el esquema general del funcionamiento de la plataforma Cloud/GIS de gestión, operación y control de sistemas de iluminación fotovoltaicos.

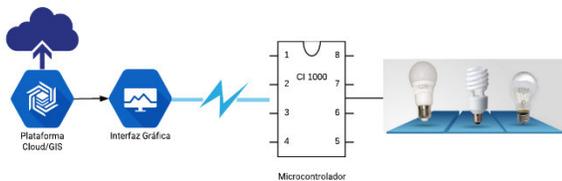


Figura 4: Esquema general del funcionamiento de la plataforma Cloud/GIS de gestión, operación y control de sistemas de iluminación fotovoltaicos.

En la Figura 5, se presenta el control de encendido y apagado de las luminarias a través de un control automático programado en una interfaz web. De esta manera se despliegan gráficas del funcionamiento del sistema por un día específico, permitiendo al usuario elegir un historial del comportamiento del sistema de iluminación. Por otra parte, también es factible desplegar información en tiempo real de los valores de porcentaje actual en la luminaria y ahorro energético.

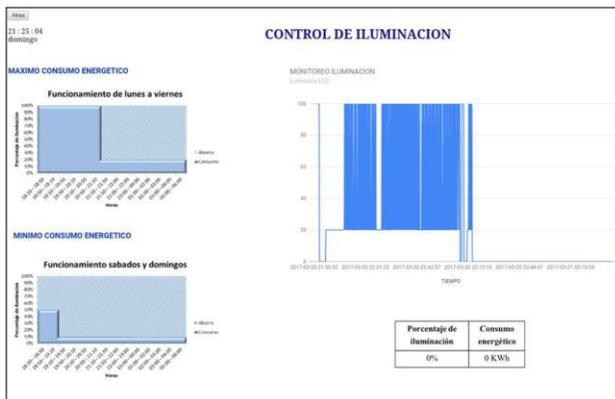


Figura 5: Interfaz web del control automático

Asimismo, el control de iluminación integra un sistema de georreferenciación de las luminarias empleando librerías de OpenLayers, que se complementa con las bibliotecas de JavaScript y PHP para interactuar, acceder y visualizar mapas en diferentes navegadores web.

2.2. Diseño del Circuito de Control de Intensidad.

El prototipo de control de las luminarias LEDs funciona en corriente continua. El sistema de control requiere modular el valor de la corriente continua de entrada, con ayuda de un regulador lineal de corriente o un convertidor DC-DC. En la Figura 6, se visualiza la simulación del regulador lineal de corriente, que se basa en la comparación del nivel de voltaje aplicado a la entrada del circuito para regular la tensión en los terminales que conectan con la luminaria.

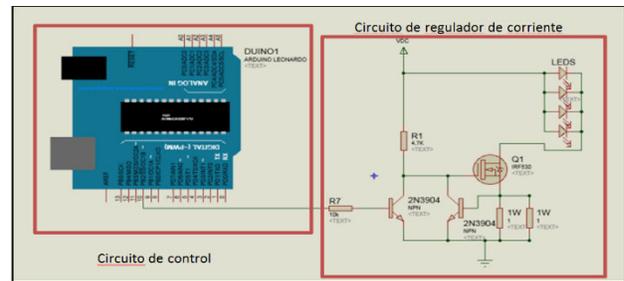


Figura 6: Circuito de control y circuito regulador de corriente DC

El regulador lineal de corriente continua está compuesto por un transistor del tipo MOSFET de potencia de canal N, el MOSFET IRF530 y un par de transistores 2N3904, conectados a la compuerta del MOSFET. Uno de los transistores 2N3904, se conecta a la salida de control; es decir, al microcontrolador. De igual manera, se requiere de un conjunto de resistencias conectadas en paralelo. El conjunto de resistencias se conecta en serie con el LED, regulando la caída de tensión al encender el LED.

En la Figura 5, se observa el circuito controlador de tipo serial, que regula la intensidad a través del MOSFET, del transistor y del conjunto de resistencias conectadas en paralelo. Al encender el circuito, el MOSFET se energiza al detectar una caída de tensión positiva en la compuerta conectada a la resistencia de 4,7 KΩ. La conducción del MOSFET enciende los LEDs y produce una caída de tensión en las resistencias conectadas en paralelo. El aumento de la intensidad genera un aumento de tensión aplicada al conjunto de resistencias. Si se supera la tensión umbral del transistor, 0.6V, el transistor conduce y disminuye la tensión aplicada en el MOSFET, inyectando así en los LEDs una intensidad proporcional al valor de las resistencias.

La luminaria LED se compone de una matriz de 8 LEDs de 3 W cada uno a una tensión de 3,7 V. La intensidad que circula por el LED a potencia nominal es igual a 0,81A. La intensidad nominal define el valor de la resistencia que

permite regular el nivel de iluminación. El valor de resistencia requerido es $0,7 \Omega$, pero no existen esas resistencias, por tanto, se optó por utilizar dos resistencias en paralelo de 1Ω que equivalen a $0,5 \Omega$.

2.3. Programación del Microcontrolador

A la entrada del transistor 2N3904 se conecta un microcontrolador de la familia Arduino, específicamente un Arduino Leonardo. La programación del microcontrolador se encarga de regular el flujo luminoso de las lámparas, a través de un control PWM. En corriente continua, la señal de tensión no varía con el tiempo. El control PWM divide la señal de tensión en ciclos de trabajo y modula el ancho del pulso de la señal. La duración del periodo de tiempo es inversa a la frecuencia PWM, que para el microcontrolador empleado es igual a 500 Hz; es decir, 2 ms (Dangermond, J., 2012).

En la programación del microcontrolador, los niveles de iluminación se deben ajustar a un rango de valores que oscila entre 0 a 255. Un cero corresponde a un nivel de iluminación del 100% mientras que el valor de 255 corresponde al 0%.

En la programación del microcontrolador se establecieron diez valores, entre 0 a 255, que permiten obtener escalones de control de 10%, entre el 10% al 100% del total de la potencia entregada por el LED.

2.4. Implementación y Validación del Circuito Regulador

El LED utilizado es un LED FLOOD LIGHT OUTDOOR de 24 W. En su interior tiene un LED DRIVER, que convierte la corriente alterna en corriente continua. El controlador del LED se conecta a la placa del circuito de control de intensidad luminosa del LED. En la Figura 7, se muestra la implementación del circuito de control de la luminaria LED.

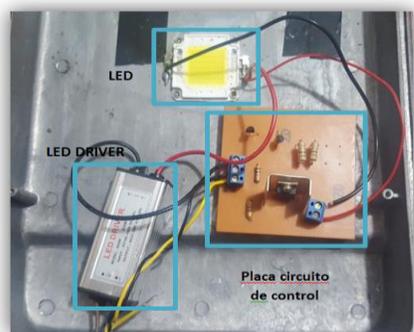


Figura 7: Circuito de control de la intensidad luminosa, implementado en el interior de la luminaria LED

Según datos del fabricante, la luminaria LED se alimenta a una tensión nominal de 120 Vac y consume 0.2 A, equivalente a un consumo de potencia igual a 24 W. En el lado de corriente continua, la tensión de salida del controlador interior del LED oscila entre 21 Vdc y 36 Vdc,

consumiendo una intensidad de 0,6 A. Para validar el comportamiento del circuito de control se realizaron las correspondientes pruebas de funcionamiento. Las pruebas consistieron en encender la luminaria a diferentes porcentajes de iluminación. Asimismo, se midieron los valores de tensión y corriente consumidos por la luminaria para el cálculo de valor de potencia eléctrica.

En la Tabla 1, se muestran los valores de tensión, intensidad y potencia medidos en el proceso de validación del circuito de control de luminosidad del LED.

Tabla 1: Valores de potencia a diferentes porcentajes de nivel de luminosidad.

Porcentaje (%)	Voltaje (V)	Intensidad (A)	Potencia (W)
0	0	0	0
10	5,5	0,397	2,18
20	8,3	0,497	4,13
30	11,4	0,567	6,46
40	13,8	0,596	8,22
50	16,8	0,625	10,50
60	18,9	0,643	12,15
70	26,1	0,601	15,69
80	27,7	0,603	16,70
90	30,4	0,606	18,42
100	33,6	0,609	20,46

2.5. Modalidad de la Comunicación.

El circuito de control es implementado en la parte interior de la luminaria cerca del LED DRIVER. En este sentido, se empleó un sistema de comunicación inalámbrica basado en el estándar IEEE 802.11 que especifica las normas de funcionamiento de una red de área local inalámbrica (WLAN) (Parkash, Prabu V, Dandu Rajendra, 2016).

El sistema de comunicación inalámbrica permite comunicar el control de iluminación con la plataforma Cloud/GIS. El núcleo del sistema de comunicación está conformado por una tarjeta Shield Arduino YUN, que es compatible con Arduino Leonardo conformando así un conjunto de dispositivos electrónicos que controlan, reciben y envían datos desde y hacia la plataforma Cloud/GIS. La tarjeta Shield Arduino YUN, procesa la información en tiempo real y la almacena en una base de datos previamente instalada. Además, una de las principales funcionalidades de esta tarjeta es su compatibilidad con diferentes sensores, asimismo, integra un socket que permite colocar una tarjeta microSD que serviría como respaldo de la información que se procesa.

2.6. Diseño y Programación de la Interfaz Web

El diseño y programación de la interfaz web se realizó sobre un servidor apache, instalado como una instancia en la Plataforma OpenStack de la Facultad de Ingeniería en Sistemas, Electrónica e Industrial, FISEI. PHP es un lenguaje

de programación de código abierto muy popular y que permite incluir contenido HTML, ideal para diseñar interfaces web. Una de las ventajas de utilizar PHP es el manejo de peticiones web que le permitirá al usuario registrar información en la base de datos de forma manual. De igual forma, mediante extensiones es posible la creación de archivos de diferentes formatos para generar reportes. El diseño de la interfaz permite el control de la iluminación de forma manual o automática. En el primer caso, en forma manual se ha diseñado un panel de control que permite enviar diferentes valores correspondientes al nivel del flujo luminoso de las luminarias. Por otra parte, el funcionamiento de forma automática se realiza a través de un reloj implementado en el servidor, el reloj marcará el tiempo de inicio y final del sistema de iluminación. La Figura 8, muestra la apariencia visual del diseño de la interfaz web implementada.



Figura 8: Diseño de la interfaz web para el control de la iluminación.

El control manual permite elegir el porcentaje de iluminación deseado para la luminaria, igualmente, apagarla y/o encenderla. El dato enviado desde la interfaz web se registra en una base de datos instalada en el servidor y se actualiza cada vez que se envíe un nuevo valor. Este valor es recibido por el microcontrolador, encargado de enviar la orden al circuito de control de intensidad, que enciende la luminaria LED al porcentaje de iluminación deseado. El control automático de iluminación permite que la luminaria LED cambie el nivel de iluminación durante la noche de forma automática, integrando un sensor de luz, que establece el inicio del control de iluminación. El prototipo de control del nivel de iluminación recibe suministro eléctrico desde un sistema solar fotovoltaico, instalado en el tejado de la FISEI en la Universidad Técnica de Ambato.

2.7. Integración del Sistema de Información Geográfica, GIS.

El control de iluminación integra un Sistema de Información Geográfica, GIS, que permite la localización geográfica de las luminarias, controladas automáticamente desde la web. Para la integración del GIS se utilizó OpenLayers, una biblioteca de JavaScript de código abierto que garantiza el acceso, gestión y visualización de mapas de manera interactiva, en la mayoría de navegadores web (Jin, D., Hannon, C., Li, Z., Cortes, P., Ramaraju, S., Burgess, P., & Shahidepour, M. 2016).

La clase OpenLayers.Map crea el mapa a visualizar en la pantalla. Para cargar el mapa en la zona deseada, en este caso, asociada a la Universidad Técnica de Ambato, UTA, se establecen las coordenadas de la zona indicada. Las coordenadas de la UTA son latitud: -1.2690897 y longitud: -78.6257485. Al mapa añadido se agrega una capa de información mediante la clase OpenLayers.Layer. El empleo del método addLayer agrega la capa de información al mapa (Jin, D., Hannon, C., Li, Z., Cortes, P., Ramaraju, S., Burgess, P., & Shahidepour, M. 2016). De esta manera, el usuario visualiza información sobre el sentido de circulación y los nombres de las calles. Se utilizó la clase OpenLayersMap porque presenta información geográfica más detallada del campus universitario. Así, en la interfaz GIS se puede visualizar el nombre de la Facultad y los sitios de parqueadero que son alumbrados por las luminarias.

Asimismo, se colocaron marcadores para visualizar en el mapa la ubicación de la luminaria LED integrada al prototipo de control de iluminación, la misma que se encuentra ubicada en la FISEI, UTA. En este sentido, es posible acceder remotamente a través de la interfaz web y controlar el nivel de iluminación. La Figura 9, muestra la interfaz web de la conexión entre el sistema GIS y el servidor web.



Figura 9: Interfaz web de localización geográfica de la luminaria integrada al control de iluminación

3. CONDICIONES DE FUNCIONAMIENTO DE LA PLATAFORMA CLOUD/GIS EN LA UTA

Para la definición de las condiciones de funcionamiento de la plataforma Cloud/GIS se realizó un registro de la afluencia de personas que transitan en horas de la noche, en el exterior de la FISEI. El registro de tránsito de personas se realizó entre las 18:00, hora de inicio de funcionamiento del sistema de iluminación exterior, y las 22:00 de la noche, hora de cierre de la universidad, Tabla 2.

Tabla 2: Datos del registro de afluencia de personas entre 18:00 y 22:00

Tiempo	Personas
18:00 - 18:10	~ 98
18:10 - 18:50	~ 148
18:50 - 19:10	~ 592
19:10 - 19:50	~ 148
19:50 - 20:10	~ 113
20:10 - 20:50	~ 125
20:50 - 21:10	~ 430
21:10 - 21:50	~ 24
21:50 - 22:00	~ 8
22:00 - 6:00	~ 8

El análisis del registro de afluencia de personas permitió determinar las condiciones de operación, gestión y control de los niveles de iluminación de la plataforma Cloud/GIS, durante la noche. En función de la regulación No. CONELEC 005/2014, que regula los parámetros fotométricos para áreas peatonales y de tráfico de baja velocidad, como sucede en los exteriores de la FISEI, de esta manera se establecieron dos tipos de iluminación para diferentes horarios.

El horario comprendido entre los días lunes a viernes se rige a una clase de iluminación tipo P2, donde el valor promedio de iluminación horizontal es de 10 luxes y un valor mínimo de 2 luxes. Por otra parte, para los días sábados y domingos, se establece una clase de iluminación tipo P3, con un valor de iluminación horizontal promedio de 7.5 luxes y un valor mínimo de 1.5 luxes (Ríos, A., Vargas, C., Guamán, J., & Rodríguez, K., 2017).

En este sentido, en las Tablas 3 y 4, se muestran los valores de niveles de iluminación óptimos en el transcurso de la noche. El sensor detecta ausencia de luz natural y activa el sistema de iluminación, con un nivel de iluminación del 100% hasta las 21:10 horas, asociada a la mayor afluencia de personas. A partir de las 21:10 horas, el nivel de iluminación se reduce al 20% durante el resto de la noche hasta las 6 am, hora en la que se desactiva el sistema de iluminación, como se puede apreciar en la Tabla 3.

Tabla 3: Niveles de iluminación de lunes a viernes.

Tiempo	Personas	Nivel de Iluminación
18:00 - 21:10	~1686	100%
21:10 - 6:00	~8	20%

En la Tabla 4, se visualizan los horarios de operación del sistema de iluminación para los fines de semana. El sistema inicia su funcionamiento con un nivel de iluminación equivalente al 50% de potencia nominal que permanecerá sin variación hasta las 19:10. A partir de las 19:10, el nivel de iluminación se reduce al 10% de la potencia nominal de la luminaria LED que permanecerá sin variación hasta el

amanecer, horario en el que se registra aproximadamente la circulación de dos personas por hora.

Tabla 4: Niveles de iluminación de sábado a domingo.

Tiempo	Personas	Porcentaje
18:10 - 19:10	~15	50%
19:10 - 6:00	~23	10%

La definición de las condiciones de funcionamiento permite establecer escenarios máximos y mínimos de consumo energético, en función de los horarios expuestos. Así, en la Figura 10, se observa el consumo de energía eléctrica en color azul, mientras que, en color blanco-azul, se visualiza el ahorro de energía, que se obtiene al implementar el control del sistema de iluminación supervisado por la plataforma Cloud/GIS. De lunes a viernes, la plataforma Cloud/GIS garantiza un nivel de iluminación máximo, con ayuda de un sensor de luz, y un nivel de iluminación mínimo, con ayuda de un sensor de presencia. Los sábados y domingos, la plataforma Cloud/GIS, actuará en función de los dos sensores el de luz y el de detección de personas.

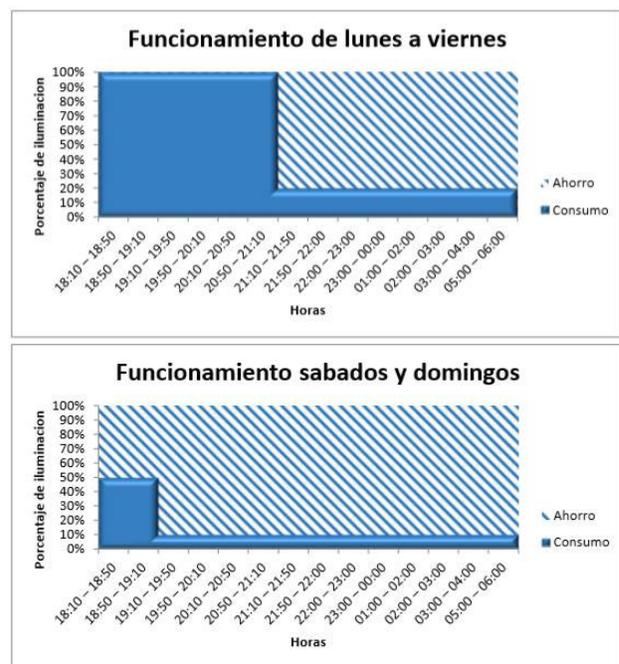


Figura 10: Condiciones de funcionamiento del control de iluminación.

Para la programación de la plataforma Cloud/GIS se determina el tiempo inicial de funcionamiento. El sensor de luz se activa entre las 18:10 y 18:20, en función de la luminosidad del ambiente. Los fines de semana, el nivel de iluminación es del 50% durante 1 hora y a un 10% durante el resto de la noche, debido a la poca afluencia de personas en esos días.

La programación y visualización de un reloj en la página web, con la hora y el día actual del servidor, permite que el valor de porcentaje de iluminación de la luminaria cambie de forma automática, enviando este valor a la base de datos y posteriormente al microcontrolador encargado de dar la orden a la luminaria de cambiar su porcentaje de iluminación. El sensor de presencia permite incrementar el nivel de iluminación al detectar la presencia de algunas personas.

Asimismo, es importante presentar escenarios de operación del sistema de iluminación. Existen diferentes formas de representar escenarios de iluminación como lo que se presenta en el análisis de operación de luminarias en autopistas inteligentes (Vargas, C., García, M., Guevara, D., & Ríos, A. 2016).

4. METODOLOGÍA DE EVALUACIÓN DEL IMPACTO ECONÓMICO Y MEDIOAMBIENTAL

La metodología propuesta de evaluación del impacto económico y medioambiental de la implementación del prototipo propuesto se basa en el trabajo presentado por (Vargas, C., Guevara, D., & Ríos, A. 2014). En este sentido, inicialmente, se evalúa el sistema de iluminación de vapor de mercurio actualmente existente en comparación con el funcionamiento del sistema de iluminación LED implementado durante un día. Posteriormente, se analiza el impacto de la implementación del sistema de control inteligente en un horizonte de 1 y 10 años, respectivamente.

4.1 Descripción de la Metodología de Evaluación para Diferentes Escenarios de Iluminación.

Las luminarias LED presentan un mayor rendimiento en la iluminación pública y mejores características técnicas frente a otras tecnologías de iluminación como lámparas incandescentes, halógenas, fluorescentes compactas y la mayoría de las fluorescentes lineales (Yoomak, Jettanasen, Ngaopitakkul, Bunjongjit, & Leelajindakrairerk, 2018). En la actualidad, la tecnología LED es considerada como la mejor alternativa para incrementar la eficiencia energética en los sistemas de iluminación.

La metodología propuesta de evaluación del impacto económico y medioambiental de la integración de sistemas de control de iluminación se basa en las siguientes etapas:

- Cálculo del consumo energético diario y anual de luminarias convencionales – vapor de sodio e incandescentes - y luminarias LED.
- Cálculo del coste económico anual de iluminación pública en luminarias convencionales – vapor de sodio e incandescentes - y luminarias LED.

- Cálculo del sistema de iluminación, incluyendo el costo de las luminarias y el costo de los dispositivos de control.
- Cálculo del costo del sistema de iluminación en un horizonte de 10 años.
- Cálculo de la cantidad de emisiones de CO₂ por parte de las luminarias evaluadas.

Para la evaluación del impacto económico y medio ambiental, empleando la metodología propuesta, se consideran luminarias de vapor de sodio y luminarias LED. La metodología permite evaluar el ahorro de consumo energético y económico al reemplazar luminarias convencionales por luminarias LED. También, es necesario evaluar el ahorro energético y económico que se obtendría al implementar la plataforma Cloud/GIS. La metodología propuesta en un inicio permite evaluar dos escenarios de iluminación: de mínimo y máximo ahorro energético.

El escenario de mínimo ahorro energético corresponde al funcionamiento de las luminarias – vapor de sodio y LED - sin ningún control del nivel de iluminación. El máximo ahorro energético corresponde al funcionamiento de las luminarias LED, basado en el control de iluminación implementado en la plataforma Cloud/GIS. Adicionalmente, se presenta la evaluación del ahorro energético que se podría obtener con la implementación del prototipo de control de iluminación en lámparas de vapor de sodio del Campus Huachi de la UTA y en las luminarias incandescentes de los reflectores de la FISEI, respectivamente.

Por otra parte, en Ecuador los costes de alumbrado público se determinan por tarifa y rango de consumo. En la Universidad Técnica de Ambato, el tipo de servicio de alumbrado público es denominado como beneficio público, que de acuerdo al pliego tarifario vigente se le asigna a escuelas, colegios y universidades públicas, con un rango de consumo eléctrico por hora de orden superior, con una tarifa de 0,063 USD/KWh mensual para la zona de Ambato (Pliego Tarifario 2018).

4.2 Escenario de Máximo y Mínimo Ahorro Energético

Para la evaluación del escenario de máximo y mínimo ahorro energético se han considerado luminarias de vapor de sodio de 250 W y luminarias LED de 24 W de potencia. En un escenario de mínimo ahorro energético se evaluará el impacto de la sustitución de luminarias de vapor de sodio por luminarias LED sin ningún control de iluminación.

Por otro lado, en un escenario de máximo ahorro energético se evaluará el impacto de sustitución de luminarias de vapor de sodio por luminarias LED, con los niveles de iluminación correspondientes a las condiciones especificadas para los días laborables: lunes a viernes, y los fines de semana: sábados y domingos. La plataforma Cloud/GIS

implementada permite regular los niveles de iluminación de las luminarias. Del 100% al 20%, los días laborales de la semana, y del 50% al 10%, los fines de semana. Las luminarias permanecen en funcionamiento 12 horas.

4.2.1 Evaluación Energética y Económica para Luminarias Exteriores de la FISEI

La Tabla 5, muestra una comparativa de cálculos obtenidos del consumo energético de 2 luminarias de vapor de sodio y 2 luminarias LED, en un escenario de mínimo ahorro energético, es decir, sin control de iluminación. Asimismo, se presentan importantes parámetros como el consumo energético, el coste económico de la iluminación del alumbrado público, el coste económico del sistema de iluminación con una proyección a 10 años y la cantidad de emisiones de CO₂ por MWh, emitido por las luminarias. Según el Sistema Nacional Interconectado se estima que en Ecuador el factor de emisión de CO₂ en el 2014 fue de 342,6 (g CO₂/kWh) (Narváez, R. P. 2015).

Las dos luminarias de vapor de sodio que se encuentran en la fachada frontal de la FISEI tienen un consumo energético anual de 2190 KWh/año, con un coste económico de 137,97 dólares anuales. La vida útil de las luminarias de vapor de sodio es de hasta 16 mil horas y el costo de cada luminaria se estima en 290 dólares. Si se considera en un horizonte de 10 años, el cambio de luminarias se realizaría aproximadamente 3 veces. Así, el sistema de iluminación representaría un gasto económico igual a 3119,7 dólares.

Al implementar luminarias LED, el consumo energético anual equivale a 210,24 kWh, con un coste económico anual en iluminación pública de 13,24 dólares. Las luminarias LED de 24 W se estiman en un costo de 50 dólares, aproximadamente. El rendimiento de las luminarias LED se estima en 50 mil horas, así, en un horizonte de 10 años no se necesitaría cambio de luminarias y el coste del sistema de iluminación equivaldría a la inversión inicial y al coste económico de iluminación pública cada año, 232,45 dólares. Si se sustituyen luminarias de vapor de sodio por luminarias LED, se obtiene un ahorro tanto económico como energético de un 90%.

Del mismo modo, en la Tabla 6, se muestran los cálculos obtenidos de consumo energético, coste económico de la iluminación pública, coste económico del sistema de iluminación con una proyección a 10 años y la cantidad de emisiones de CO₂, para un escenario de máximo ahorro energético, con control de iluminación en luminarias LED. Las luminarias LED tienen una reducción del 100 al 20% en el nivel de iluminación, de lunes a viernes y del 50 al 10%, los sábados y domingos.

La implementación de un sistema de control en las luminarias LED permite obtener un consumo energético anual de 126,14 KWh, con un gasto total en el consumo eléctrico de

iluminación anual equivalen a 7,94 dólares. El costo de los dispositivos de control se estima en unos 121 dólares por luminaria LED, con una vida útil de 3 años, así, en una proyección de 10 años, los dispositivos necesitarían ser cambiados 3 veces, estimando un costo total de 726 dólares, si le sumamos el costo de las luminarias LED y el costo económico de la iluminación pública, el costo del sistema de iluminación en 10 años equivaldría a un total de 905,47 dólares.

Con la implementación del sistema de control de iluminación sustituyendo luminarias de vapor de sodio en luminarias LED el ahorro económico anual obtenido es de aproximadamente un 94% y una reducción de 1433,34 toneladas de emisiones de CO₂.

4.2.2 Escenario Hipotético de Implementación de la Plataforma Cloud/GIS en el Campus Huachi UTA.

La Universidad Técnica de Ambato, cuenta con aproximadamente 142 luminarias de vapor de sodio de 250 W. En la Tabla 7, se presentan los cálculos de consumo energético anual, coste económico de la iluminación pública, coste económico del consumo eléctrico del sistema de iluminación con una proyección a 10 años y la cantidad de emisiones de CO₂, para un escenario de mínimo ahorro energético, con control de iluminación en luminarias LED. El sistema de control de iluminación permite reducir los niveles de porcentaje de iluminación del 100 al 20%, de lunes a viernes y del 50 al 10%, sábados y domingos. Las 142 luminarias de vapor de sodio de 250 W consumen un total de 155,49 MWh anuales, equivalente a un coste económico anual de iluminación pública de 9795,87 dólares.

En un horizonte de 10 años, el costo del sistema de iluminación equivaldría a un total de 221 mil dólares. Si se reemplazan las luminarias de vapor de sodio por luminarias LED, con una plataforma Cloud/GIS de control de nivel de iluminación, el consumo energético anual equivale a 8,9 MWh, con un coste anual en iluminación pública de 564,24 dólares. La inversión inicial del sistema de control de iluminación se estima en 24 mil dólares, pero el ahorro obtenido tanto económico como energético asciende a un 94%.

Tabla 5: Consumo energético y coste económico de luminarias del alumbrado público en un escenario de mínimo ahorro energético

Mínimo ahorro energético/Sin Control de Iluminación						
Tipo de Luminaria/Potencia W	Consumo energético (kWh/día)	Consumo energético anual (kWh/año)	Coste económico anual de iluminación pública (USD)	Coste económico luminarias (USD)	Coste económico Sistema de iluminación en 10 años (USD)	Emisión de CO2 anual (Ton CO ₂ /kWh)
Vapor de Sodio 2 x 250 W	6	2190	137,97	580	3119,7	1520,96
LED 2 x 24 W	0,576	210,2	13,25	100	232,45	146,01

Tabla 6: Consumo energético y coste económico de luminarias del alumbrado público en un escenario de máximo ahorro energético

Máximo ahorro energético								
Tipo de Luminaria/Potencia W	Consumo energético (kWh/día)		Consumo energético anual (kWh/año)	Coste económico anual de iluminación pública (USD)	Coste económico luminarias (USD)	Coste económico Sistema de iluminación. Luminarias+ dispositivos de control (USD)	Coste económico. Sistema de iluminación en 10 años (USD)	Emisión de CO2 anual (Ton CO ₂ /kWh)
	L-V	S-D						
Vapor de Sodio 2 x 250 W	6		2190	137,97	580	X	3119,7	1520,96
LED /Control 2 x 24 W	0,23	0,12	126,14	7,94	100	342	905,47	87,61

Tabla 7: Consumo energético y coste económico del posible escenario de implementación del sistema de iluminación en el campus Huachi de la UTA.

Escenario de iluminación en el campus Huachi de la UTA.								
Tipo de Luminaria/Potencia W	Consumo energético (kWh/día)		Consumo energético anual (kWh/año)	Coste económico anual de iluminación pública (USD)	Coste económico luminarias (USD)	Coste económico Sistema de iluminación. Luminarias+ dispositivos de control (USD)	Coste económico. Sistema de iluminación en 10 años (USD)	Emisión de CO2 anual (Ton CO ₂ /kWh)
	L-V	S-D						
Vapor de Sodio 2 x 250 W	426		155490	9795,87	41180	X	221498,7	107987,81
LED /Control 2 x 24 W	16,35	8,17	8956,22	564,24	7100	24282	64288,4	6220,097

5. CONCLUSIONES

La plataforma Cloud/GIS implementada permite regular los niveles de iluminación de las luminarias LED y obtener un ahorro adicional del consumo energético, además, de una reducción muy considerable en las pérdidas de energía eléctrica en los sistemas de distribución. Asimismo, la integración de un Sistema de Información Geográfica, GIS, en la Plataforma Cloud, permite la localización geográfica de los sistemas de control de iluminación, para un mayor control, de forma independiente, de cada uno o de clusters de sistemas de iluminación integrados.

La sustitución de las luminarias convencionales de vapor de sodio por luminarias con tecnología LED, es una alternativa eficiente para el sistema de alumbrado público. La implementación de luminarias LED permite un ahorro energético por KWh anual de hasta un 90%.

La implementación de la plataforma Cloud/GIS en un sistema de iluminación pública con luminarias LED, en el Campus Huachi, UTA, se convierte en una solución tecnológica innovadora para el ahorro energético. La plataforma Cloud/GIS permitiría obtener un ahorro anual de hasta un 97%, con un ahorro económico anual superior a 157 mil dólares en 10 años.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a la Dirección de Investigación y Desarrollo, DIDE de la Universidad Técnica de Ambato por su especial apoyo en el desarrollo de la presente propuesta gracias a la financiación del proyecto: “Diseño e Implementación de un Sistema Monitoreo Remoto para las Instalaciones Fotovoltaicas Aisladas de las Comunidades Amazónicas del Ecuador”.

REFERENCIAS

- Dangermond, J. (2012). Geography: A Platform for Understanding. Invited Paper, reprint from ArcNews, 7.
- Gómez Delgado, M. (2016). La educación geográfica empleando las tecnologías de la información geográfica.
- Guamán, J. I., Vargas, C. L., García, M. G., & Ríos, A. (2017). Plataformas de Control Inteligente de Iluminación Interior integrados en Sistemas de Distribución LVDC. *Revista Técnica Energía*, 13(1), pp. 169-178. <https://doi.org/10.37116/revistaenergia.v13.n1.2017.19>
- Guamán, J., Guevara, D., Vargas, C., Ríos, A., & Nogales, R. (2017). Solar manager: Acquisition, treatment and isolated photovoltaic system information visualization cloud platform. *POWER*, 42(170Ma), 700Ma.
- Jin, D., Hannon, C., Li, Z., Cortes, P., Ramaraju, S., Burgess, P., & Shahidehpour, M. (2016). Smart street lighting system: A platform for innovative smart city applications and a new frontier for cybersecurity. *The Electricity Journal*, 29(10), 28-35.
- Mahmoud, E., Hegazy, O., & El-Dien, M. N. (2013). Integration of GIS and cloud computing for emergency system. *International Journal of Engineering and Computer Science*, 2(10), 2889-2893.
- Manzano, S., Peña-Ortiz, R., Guevara, D., & Ríos, A. (2014). Plataforma Cloud para monitoreo remoto de sistemas fotovoltaicos aislados en el Ecuador. *Maskana*, 5(Ed. Esp.).
- Manzano, S., Peña, R., Guevara, D., & Ríos, A. (2014, November). An Overview Of Remote Monitoring PV Systems: Acquisition, Storages, Processing And Publication Of Real-Time Data Based On Cloud Computing. In 13Th International Workshop on Large-Scale Integration of Wind Power into Power Systems as well as on Transmission Networks for Offshore Wind Power Plants & 4th Solar Integration Workshop which will be held from.
- Manzano, S., Peña, R., Guevara, D., & Ríos, A. (2014). A cloud scalable platform for monitoring isolated PV systems using wireless remote sensors in Ecuador. *Proceedings ExtremeCom*, 4-8.
- Manzano, S., Guevara, D., & Ríos, A. (2015). A new architecture proposal for PV remote monitoring based on IoT and cloud computing. *Renewable Energy & Power Quality Journal*, RE&PQJ.
- Morales, M. F. (2012). Computación en la nube para automatizar unidades de información. *Bibliotecas: Revista de la Escuela de Bibliotecología, Documentación e Información*, 30(1).
- Narváez, R. P. (2015). Factor de emisión de CO₂ debido a la generación de electricidad en el Ecuador durante el periodo 2001-2014. *ACI Avances en Ciencias e Ingenierías*, 7(2). C80-C85
- Parkash, Prabu V, Dandu Rajendra. (2016). Internet of Things Based Intelligent Street Lighting System for Smart City. *Departamento de Diseño de Sistemas Embebidos*, NIELIT, Calicut India. 5(5).
- Pisu, C., & Casu, P. (2013). Cloud GIS and 3d modelling to enhance sardinian late gothic architectural heritage. *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 5, W2. 489-494. 10.5194/isprsarchives-XL-5-W2-489-2013.
- Ríos, A., Vargas, C., Guamán, J., & Rodríguez, K. (2017). Sistema de Iluminación Fotovoltaico en el Alumbrado Público Gestionado a través de una Plataforma Cloud/GIS. *Revista Politécnica*, 39(1), 59-66.
- Rodríguez, N. R., Murazzo, M. A., Chávez, S. B., & Guevara, M. J. (2014). Arquitectura de cloud computing híbrida basada en tecnologías open source. In *XX Congreso Argentino de Ciencias de la Computación* (Buenos Aires, 2014).
- Segura, A. A. (2016). Arquitectura de Software de Referencia para Objetos Inteligentes en Internet de las Cosas. *Revista Latinoamericana de Ingeniería de Software*, 4(2), 73-110.
- Soni, E., Soni, V., & Annapurna, D. (2016). Remotely Controlled Automated Street Lights: A Novel Approach towards IoT (Internet of Things), (April).

Vargas, C., Guamán, J., Nogales, R., & Ríos, A. (2017). Photovoltaic Lighting System with Intelligent Control based on ZigBee and Arduino. *Energy*, 100, 190.

Vargas, C., García, M., Guevara, D., & Ríos, A. (2016). Escenarios de Integración de Sistemas Inteligentes de Iluminación Fotovoltaica en las Autopistas del Ecuador. *Revista Técnica Energía*, (12).

Vargas, C., Guevara, D., & Ríos, A. (2014). Viabilidad económica del control de la iluminación fotovoltaica en autopistas del Ecuador.

Yoomak, S., Jettanasen, C., Ngaopitakkul, A., Bunjongjit, S., & Leelajindakraierk, M. (2018). Comparative study of lighting quality and power quality for LED and HPS luminaires in a roadway lighting system. *Energy and Buildings*, 159(December 2017), 542–557. <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2017.11.060>

la Maestría en Electricidad mención Redes Eléctricas Inteligentes.



Katherine Rodríguez Mora. - Nació en Ambato, Ecuador, el 26 de julio de 1992. Se graduó como bachiller en el Colegio “La Inmaculada” en el 2010. Recibió su título de Ingeniera en Electrónica y Comunicaciones en la Universidad Técnica de Ambato, UTA, 2016.



Alberto Ríos Villacorta- Dr. Ingeniero Eléctrico por Universidad Carlos III de Madrid, 2007. Master en Energías Renovables por la Universidad Europea de Madrid, 2004. Ingeniero Eléctrico en Sistemas y Redes Eléctricas por el Instituto Politécnico de Bielorrusia, 1993. Profesor Ayudante de la Universidad Carlos III de Madrid, 1998 - 2001. Profesor Adjunto de la Universidad Europea de Madrid, 2001-2014. Director Técnico del Laboratorio de Ensayos de Turbinas Eólicas y Simulaciones de parques Eólicos, Energy to Quality, 2005-2006. Director del Master Oficial de Energías Renovables de la Universidad Europea de Madrid, 2007-2011. Investigador Postdoctoral en la Universidad Técnica de Ambato entre 2014-2016, Beca Prometeo, SENESCYT, Ecuador. Profesor Titular Principal, Facultad de Ingeniería en Sistemas, Electrónica e Industrial, Universidad Técnica de Ambato, 2017. Consultor Internacional, Especialista en Energías Renovables y Eficiencia.

BIOGRAFÍAS



Carlos Luis Vargas Guevara- Nació en Ambato, Ecuador en 1991. Ingeniero en Electrónica y Comunicaciones por la Universidad Técnica de Ambato, 2015. Asistente de Investigación en la Unidad Operativa de Investigación y Desarrollo de la Facultad de Ingeniería en

Sistemas, Electrónica e Industrial de la Universidad Técnica de Ambato. En la actualidad se encuentra realizando sus estudios de Posgrado en la Escuela Politécnica Nacional en la Maestría en Electricidad mención Redes Eléctricas Inteligentes.



Jesús Guamán Molina- Nació en Latacunga, Ecuador en 1990. Ingeniero en Electrónica y Comunicaciones por la Universidad Técnica de Ambato, 2015. Desde el año 2015, trabaja en calidad de Asistente de Investigación en la Unidad Operativa de Investigación y

Desarrollo de la Facultad de Ingeniería en Sistemas, Electrónica e Industrial de la Universidad Técnica de Ambato. En la actualidad se encuentra realizando sus estudios de Posgrado en la Escuela Politécnica Nacional en

Proyectos Fotovoltaicos en Generación Distribuida ¿Rentabilidad Privada o Sustentabilidad Ambiental?

Cisterna Arellano, Luis ¹ ; Améstica-Rivas, Luis ^{1*} ; Piderit, María Beatriz ² 

¹Depto. de Gestión Empresarial, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad del Bío-Bío, Chile

²Depto. Diseño y Teoría de la Arquitectura, Facultad de Arquitectura, Construcción y Diseño, Universidad del Bío-Bío, Chile

Resumen: Las energías renovables son pilares estratégicos para disminuir la emisión de gases y daños a la atmósfera. Se reconoce un crecimiento exponencial, destacando la energía solar a través de instalaciones fotovoltaicas, expresión de ello son las inversiones a escala especialmente en el norte de Chile. En este contexto, este trabajo tiene como objetivo evaluar económicamente proyectos de menor escala como son los de Generación Distribuida, calculando su rentabilidad privada y de carácter social, incluida una valoración económica ambiental de proyectos en la intercomuna de Chillán – Chillán Viejo, como un estudio de caso. Para ello, se analiza la Ley 20.571, que permite a las generadoras residenciales vender sus excedentes de energía a la distribuidora eléctrica a precio regulado. Se realizó un estudio para 17 instalaciones del área residencial, agrícola, industrial y comercial, desarrollando un análisis del Valor Actual Neto (VAN) y la Tasa Interna de Retorno (TIR). Se construyeron los promedios móviles de consumo antes y posterior a sus operaciones, pago directos, costos e ingresos por venta de excedentes. Asimismo, se simuló una compensación de ingresos por venta de bonos de carbono. Los resultados, tanto en evaluación privada como la valoración económica ambiental, arrojan resultados desfavorables, de lo cual se puede inferir que este tipo de proyectos no son rentables en los sectores que abarca el estudio, y es necesario un apoyo estatal a la inversión inicial o la tarifa. Sin embargo, existe una dimensión que va más allá de lo económico que debe sustentar una política fiscal de apoyo para los próximos años.

Palabras clave: Energía Solar Fotovoltaica, Generación Distribuida, Rentabilidad, Bonos de carbono.

Photovoltaic Projects in Distributed Generation. Private Profitability or Environmental Sustainability?

Abstract: Renewable energies are strategic pillars for reducing gas emissions and atmospheric damage. It is recognized an exponential growth, highlighting solar energy and their photovoltaic installations, a key example of this is the scale of investments, especially in the north of Chile. In this context, this work aims to economically assess smaller-scale projects that are being built, such as those of Distributed Generation, calculating their private and social profitability, including an environmental economic assessment of projects in the Chillán - Chillán Viejo district, as a case study. To do this, Law 20,571 is analyzed. This law allows residential generators to sell their surplus energy to the electricity distributor at a regulated price. A study was made for 17 residential, agricultural, industrial and commercial installations, developing an analysis of the Net Present Value (NPV) and the Internal Rate of Return (IRR). The mobile consumption averages before and after their operations, direct payment, costs and income from the sale of surpluses were built. Likewise, income compensation for the sale of carbon credits was simulated. The results, both in private evaluation and environmental economic assessment, show unfavorable results, and it may be inferred that this type of project is not profitable in the sectors covered by the study, with the need for state support for the initial investment or the tariff. However, there is a dimension that goes beyond the economic that should underpin a supportive fiscal policy for the coming years.

Keywords: Photovoltaic Solar Energy, Distributed Generation, Profitability, Carbon credits.

1. INTRODUCCIÓN

La transición de las energías desde los combustibles fósiles a la electricidad es una realidad, este hecho está directamente relacionado con el crecimiento económico de un país, así la

matriz energética tiende a migrar hacia energías limpias como lo es la electricidad (Jiang & O'Neill, 2004), esto debido a que la energía eléctrica se puede transformar fácilmente en otras energías como; energía lumínica, energía mecánica, energía térmica, entre otras y de acuerdo con las fuentes de donde se

*lamestica@ubiobio.cl
Recibido: 30/10/2018
Aceptado: 08/05/2020
Publicado: 31/05/2020
10.33333/rp.vol45n2.03
CC BY 4.0

obtiene, se pueden diferenciar entre fuentes de energías no renovables y fuentes de energías renovables (ER). Las fuentes de energía no renovables son recursos energéticos que se agotan cuando son empleados, como el petróleo, el gas natural o el carbón y la energía procedente de fuentes renovables se les define como “La energía procedente de fuentes renovables no fósiles, es decir, energía eólica, solar, aerotérmica, geotérmica, hidrotérmica y oceánica, hidráulica, biomasa, gases de vertedero, gases de plantas de depuración y biogás” (Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea, 2009). Se ha establecido que la energía solar fotovoltaica (PV) es una solución sostenible para resolver la crisis energética mundial. La problemática se produce en la utilización de fuentes no renovables, como combustibles fósiles o elementos radioactivos, para la generación de energía eléctrica, debido a la notable contribución a la contaminación ambiental, que a su vez está ocasionado un calentamiento global, que está provocando un efecto desbastador sobre el clima de la tierra.

Un estudio señala que por 1 Kilowatts-hora (kWh) gastado en electricidad casera que produce una termoeléctrica, se genera hasta 0,7 kilogramos de CO₂ (Medina, 2010). En forma opuesta, el uso de fuentes renovables para producir energía eléctrica minimiza el daño ocasionado al medio ambiente, disminuyendo la producción de gases de efecto invernadero (GEI), debido a que en el proceso no intervienen combustibles fósiles, a estas fuentes de energía que tienen bajo impacto e intervención en el medio, se les conoce como “Energías Renovables No Convencionales” (ERNC) (Behnke et al., 2009), y se les denomina de esta manera, debido a que difiere de otros tipos de energías renovables, en cuanto al uso y cantidad de recursos utilizados.

De las ERNC más conocidas y utilizadas, destaca la energía solar, un estudio realizado el año 2014, hace mención al enorme crecimiento que ha experimentado la energía solar en los últimos 10 años, pasando de un tipo de energía prometedora, a una realidad, debido a que es una energía fácil de producir y totalmente accesible, donde actualmente existen millones de unidades de paneles fotovoltaicos instalados en todo el mundo, cubriendo un área cercana a los 600.000 kilómetros cuadrados (Ovalle Cubillos, 2014). Se destaca a España y Alemania, como los países de la Unión Europea con la más alta capacidad de energía fotovoltaica (FV) instalada, lo que ha generado un aumento substancialmente las investigaciones en energía solar, la que representan 51% del total en la UE-27 y existen más publicaciones e investigaciones en este tipo de energía, en comparación con otros tipos de energías renovables, siendo las universidades las que más aportes hacen a esta investigación, en desmedro del bajo interés de la empresa privada. Sin embargo, es el mercado asiático quien domina el mercado global a partir de la aparición de China como el principal mercado FV (Plá, Bolzi & Durán, 2011). El uso de este tipo de energía ha aumentado más de 20 veces en los últimos 15 años y la meta de la Unión Europea es lograr el 20% de la matriz energética, este compuesto por este tipo de energías, al año 2020 (Sanz-Casado et al., 2014). Alemania ha sido concebido como líder en la instalación de paneles solares a gran escala sobre las cubiertas de industrias, hogares y granjas, siendo la introducción de la Ley de Tarifas en 1999 la que generó condiciones favorables para los inversores de estos proyectos (Jager-Waldau, 2007).

Otro caso interesante es España, donde se plantea que la evolución de la industria solar permitirá al 2020, que el coste de la electricidad producida mediante fuentes de generación solar sea tan competitivo como el coste de generación de las centrales de ciclo combinado de gas. Se ha hecho mención a la evolución previsible de las tecnologías, también se describe el papel que debería desempeñar, tanto el gobierno como las empresas generadoras, para poder desarrollar un modelo competitivo que permita el desarrollo óptimo de la industria solar en España (González, 2014).

En tanto, en América Latina ha incrementado significativamente su participación en el mercado fotovoltaico a través de la instalación de centrales de potencia como principal fuente (Plá, Bolzi & Durán, 2011). Son cuatro los países que lideran la generación energía solar: México, Brasil, Argentina y Chile. Este último ha experimentado un crecimiento desde la proclamación de la Ley 20.257 de Energías Renovables No Convencionales del año 2008 (Ministerio de Economía, Fomento y Reconstrucción del Gobierno de Chile, 2008), con una capacidad casi cero en ese año, a más de 1.6 gigavatios en marzo de 2017 (World Economic Forum, 2017). En este contexto, es sabido que los países latinoamericanos son energético-dependientes y esto a su vez refuerza la necesidad de diversificar sus economías y buscar sustitutos energéticos para el futuro (Dalmazzo-Bermejo, Valenzuela-Klagges & Espinoza-Brito, 2017). En tanto, la realidad energética en Chile señala que el 68% de la energía eléctrica consumida, es generada por centrales térmicas accionadas por combustibles fósiles, los que deben ser importados en un orden del 90%, esto implica que Chile sea el segundo país, con tarifas eléctricas más altas de Sudamérica, siendo superado sólo por Perú (Rivas y Cardemil, 2015).

Para implementar la generación a través de ERNC en Chile, se han generado marcos legales que incorporan al sistema estas fuentes de generación, así como la forma que se deben compensar. A estas fuentes de generación se les ha denominado Generación Distribuida (GD) y bajo esta denominación se les define como pequeñas fuentes de generación ubicadas en un lugar próximo a los sitios donde es consumida, conectada a la red de distribución de media o baja tensión o directamente a la red pública de distribución (Plá, Bolzi y Durán, 2018; Ackermann, Andersson & Söde, 2001). Generalmente se asocia al autoabastecimiento (Bermejo y Vasco, 2013). Rütther & Zilles (2011), establecen que la energía fotovoltaica (FV) a través de sistemas conectados a la red promueve diversos beneficios al sistema eléctrico y el medio ambiente, y como principal ventaja técnica describe la posibilidad de producir electricidad en los propios puntos del consumo.

Tal como se señaló, desde el año 2008 Chile cuenta con la Ley 20.257 (Ministerio de Economía, Fomento y Reconstrucción del Gobierno de Chile, 2008), que promueve la generación de energía eléctrica por medio de fuentes de ERNC. Para ello se eligió el sistema de cuotas, mediante el cual se establece la obligación a las empresas eléctricas, que un porcentaje de la energía que comercializan provenga de fuentes ERNC, específicamente se determina que entre los años 2010 y 2014, la obligación de suministrar energía con medios renovables no convencionales será de 5%, y a partir de 2015, este porcentaje

se incrementará en un 0,5% anual, hasta llegar al 10% en el año 2024. En la política energética “Energía 2050” (Ministerio de Energía del Gobierno de Chile, 2018b) se define que la ERNC, en 2035 llegue a constituir un 40% de la generación del país. Una de las grandes deudas de la Ley 20.257, es que no permitía el acceso de las pequeñas instalaciones de ERNC, inyectar los excedentes al sistema eléctrico y con ello, dichos excedentes irremediablemente se perdían al no contar con un sistema de almacenamiento de bajo costo (baterías). Finalmente, este vacío se superó con la Ley 20.571 “Ley de Generación Distribuida” (Ministerio de Energía del Gobierno de Chile, 2012), implementada en septiembre de 2014, esta ley regula el pago de las tarifas eléctricas de las generadoras residenciales y permite la autogeneración de energía en base a ERNC y cogeneración eficiente. Esta ley, conocida también como Generación Distribuida, entrega el derecho a los usuarios a vender sus excedentes directamente a la distribuidora eléctrica a un precio regulado, el cual está publicado en el sitio web de cada empresa distribuidora, cuyo límite de generación actual de 300 Kilowatts (kW).

El crecimiento que ha experimentado las ERNC acogidas a la ley 20.571 ha sido modesto en comparación con la potencia instalada que han alcanzado otros países del año 2012 a la fecha (Salazar-Peralta, Araceli, et al., 2016). Según datos recogidos de la página web www.energiaabierta.cl, del Ministerio de Energía de Chile y como se puede observar en la Figura 1, en el año 2015 se comenzó tímidamente con la puesta en servicio de instalaciones con capacidad de generación de 1.398 Kilowatts (kW) y el año 2017 se llegó a 7.445 kW y al mes de mayo de 2018, se han instalados 5.317 kW, lo que implica que en cuatro años se han incorporado 18.000 Kilowatts (kW) o 18 Megawatts (mW) de potencia instalada de ERNC, a la matriz energética de Chile.

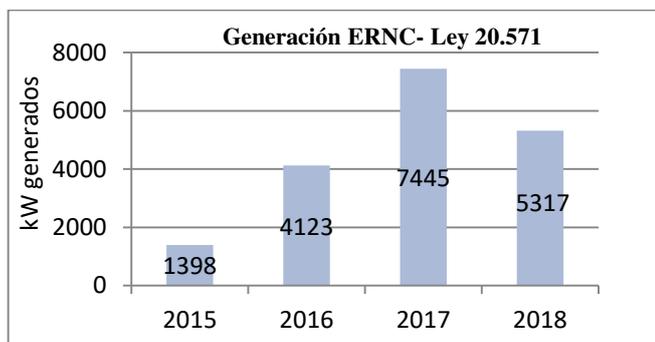


Figura 1. Elaboración propia

En la Tabla 1, podemos observar que la energía solar destaca entre sus pares, donde la potencia instalada a través de energía solar equivale al 99,4% de potencia total instalada desde el año 2015 a la fecha, según datos recogidos de la página web www.energiaabierta.cl, del Ministerio de Energía de Chile, publicada en el año 2018.

Tabla 1. Instalaciones de ERNC acogidas a ley 20.571

Fuente Energía	Cantidad	Potencia Instalada (kW)	%
Biomasa	2	60	0,33%
Cogeneración Eficiente Hidráulica	1	50	0,27%
Hidráulica	2	2	0,01%
Solar	2758	18.171	99,39%
Total	2763	18.283	100%

Fuente: elaboración propia

1.2 Una mirada desde la sustentabilidad ambiental

En los últimos años, la literatura reconoce las ventajas de la implementación de fuentes energéticas renovables en la reducción de impactos ambientales y especialmente mejora en la soberanía energética con la disminución de la dependencia energética y la diversificación de la matriz energética, pero especialmente para justificar este tipo de inversiones, se hace necesario la cuantificación de estos aspectos y de una evaluación costo beneficio para determinar la conveniencia de la inversión (Cruz et al., 20016), como la ausencia de la contabilización de las externalidades en el análisis costo beneficio de estas iniciativas (Painuly, 2001).

Una de las ventajas está dada por su contribución a la reducción de emisiones de Gases de Efecto Invernadero (GEI) y otros contaminantes que proviene del uso de combustibles fósiles que se usan generalmente en las industrias, como el petróleo, el carbón o el gas natural. Siendo el Protocolo de Kyoto donde se sienta las bases de la arquitectura del mercado de carbono, donde se transa los llamados Certificados de Emisiones Reducidas, (CERs), o “bonos de carbono” (Posso, Acevedo & Hernández, 2014), donde cada uno representa el derecho a emitir una tonelada de dióxido de carbono (tCO₂), equivalente a una estimación monetaria del carbono a partir de los beneficios de las reducciones de gases de efecto invernadero. En general, aquellas empresas que reduzcan sus emisiones contaminantes por debajo de su cupo pueden vender sus bonos, los cuales pueden ser adquiridos por aquellas empresas que necesiten reducir sus emisiones para cumplir con el cupo que tienen asignado, y cuya reconversión tecnológica es más costosa que la compra de bonos.

Amorós y Micaló (2005) establecen que existen diferentes métodos de valoración para fijar un valor monetario al carbono, los cuales se pueden clasificar en tres grupos: métodos basados en los costes de los daños evitados (*Method of Avoided Damages*), métodos basados en los costes de reducción de las fuentes de emisiones de carbono (*Mitigation Option Approach*), que tratan de aproximar el valor del carbono mediante el coste de reducir las emisiones de CO₂ que se liberan a la atmósfera y los basados en los costes de incrementar la cantidad de carbono almacenada en el sistema (*Enhanced Sequestration Option o Sink option*).

Para el caso chileno, Rivas & Cardemil (2015) analizan evolutivamente distintas investigaciones del mercado del carbono en inversiones energías fotovoltaicas y especialmente las características en la fijación de las emisiones y del precio de los bonos. Lo que es evidente son las condiciones geográficas y climáticas en el recurso solar chileno y las perspectivas para la industria fotovoltaica solar el futuro despliegue de tecnología fotovoltaica en este país (Zurita, et

al, 2018). Coincidentemente en un trabajo reciente de Simsek et al, (2018), se establecen las favorables condiciones de Chile para proyectos de energía solar concentrada especialmente en el norte, haciendo hincapié que los proyectos de energía solar térmica necesitan algunos mecanismos de apoyo y analiza mejores combinaciones de incentivos solares y parámetros financieros para un mejor desempeño del sector.

Ahora bien, a pesar de esta búsqueda de valorizar monetariamente los impactos ambientales, Müller-Steinhagen, & Nitsch (2005) señalan que las implicaciones económicas son de amplio espectro ocultando incluso las de tipo social y por ello, todo estudio integral de las mismas amerita un enfoque multidimensional, garantizando la sustentabilidad del mismo al satisfacer el criterio de sustentabilidad basado en la compatibilidad ambiental y un uso más racional y eficiente de las fuentes de energía.

En este sentido y tomando en cuenta que el análisis se concentra en proyectos de menor escala como son de generación distribuida, surge la pregunta si ¿es económicamente rentable implementar este tipo de fuentes de generación?, para dar respuesta a esta interrogante, se ha tomado una evaluación privada y otra con la incorporación de la valoración económica ambiental. Como caso de estudio se utiliza las instalaciones fotovoltaicas existentes en la inter comuna Chillán-Chillán Viejo, que se encuentren válidamente inscritas, de acuerdo con lo establecido en la Ley 20.571. Para ello se ha hecho un levantamiento de las instalaciones existentes, analizando las variables de costo de implementación, consumo antes y después de la instalación fotovoltaica y generación de energía eléctrica de estas instalaciones, que se desarrollan a lo largo de este artículo.

2. METODOLOGÍA

La investigación analiza ex post la rentabilidad bajo un enfoque privado y social de las instalaciones fotovoltaicas existentes en la inter comuna de Chillán - Chillán Viejo, que se encuentren válidamente inscritas, de acuerdo con lo establecido en la Ley 20.571, que permite inyectar excedentes de energía eléctrica a las redes de distribución pública. Para lo cual se realizó un estudio de caso, utilizando la metodología de evaluación financiera de proyectos de inversión (Sapag, 2007), analizando las variables de costo inicial, ahorro de energía e inyección de excedentes a la red de distribución bajo el enfoque privado e incorporando una simulación de los beneficios por emisión de bonos de carbono como compensación de las fuentes limpias en el caso del enfoque social. Dado que la propiedad de las unidades de estudio es heterogénea (personas y empresas), existen regímenes tributarios diversos, no identificándose beneficios tributarios directos a la inversión y tampoco se incorporaron al modelo financiero general. La información se obtuvo de organismos gubernamentales y de las empresas privadas de distribución de energía eléctrica presentes en la zona.

Se utilizó como base fundamental parámetros esenciales para la viabilidad económica de la irradiación fotovoltaica y las tarifas de electricidad locales, en una adaptación a partir de la

metodología de Mitscher & Rütther (2012), quienes analizaron la competitividad económica de la generación solar fotovoltaica distribuida conectada a la red a través de instalaciones en techos a pequeña escala en cinco capitales estatales brasileñas, calculando los valores actuales netos (VAN) de cada sistema de producción fotovoltaica, modelando el flujo de ingresos a partir de la venta de electricidad fotovoltaica a las tarifas de compra de las compañías de electricidad locales y el ahorro por el autoconsumo a la tarifa residencial, asumiendo la medición neta. Se expone su formulación en la ecuación (1):

$$VAN = I_0 + \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+r)^t} \quad (1)$$

Siendo I_0 la inversión inicial en el periodo cero; F_t el flujo (ingresos – costo) en cada periodo t ; n el número de periodos de evaluación (horizonte del proyecto, se excluye el periodo cero); y r como la tasa de descuento. A su vez para el enfoque de valoración económica ambiental, se agregan ingresos extraordinarios al flujo, simulando la obtención de la venta de “bonos de carbono” a precio de mercado, como compensación de las emisiones reducidas de CO₂.

Para recabar la información, se solicitó al Departamento de ERNC de la Superintendencia de Electricidad y Combustibles (SEC), la base de datos de las instalaciones fotovoltaicas existentes en la intercomuna de Chillán - Chillán Viejo, con un total de 24 instalaciones válidamente inscritas y certificadas. Posteriormente, se solicitó a las empresas de distribución de energía eléctrica locales, los registros de los consumos de energía de estos servicios desde el año 2010 a la fecha, que muestra los consumos mensuales antes y después de la implementadas las instalaciones fotovoltaicas, con el objetivo de realizar la comparación de dos periodos estacionales que comprenden los mismos meses calendarios anterior y posterior a la instalación de los PFV.

De las 24 instalaciones fotovoltaicas antes mencionadas, podemos señalar que tres se encuentran recientemente conectadas y cuatro aún sin conexión a la red pública, por lo que estas siete instalaciones fueron excluidas por no tener historia y un registro de generación de energía eléctrica a través de PFV, datos necesarios para realizar el análisis financiero. Con las 17 instalaciones fotovoltaicas vigentes, foco de este estudio, se analizó consumos, ahorros y generación de energía eléctrica, este análisis consistió en tomar un periodo estacional regular antes de la implementación de la instalación fotovoltaica y obtener un consumo promedio mensual del servicio, considerando para el mismo periodo estacional una vez conectada la instalación fotovoltaica a la red de distribución y de esta forma obtener un consumo promedio mensual del servicio. De la comparación de estos periodos se obtuvo el ahorro de energía eléctrica, valorizado a precio de compra que se le cancela a la empresa eléctrica, que en el caso CGE corresponde a CLP\$125 del kWh mensual y CLP\$126 del kWh mensual para COPELEC.

Posteriormente, se realizó el cálculo de la inyección promedio mensual de energía, que suministra el servicio a la red de la empresa de distribución, registro obtenido a través de la lectura de los medidores electrónicos, el cual se encuentra separado de

la inyección al sistema y del consumo de energía. Esta inyección mensual de energía se mide en kWh mes y se valoriza a CLP\$78. Esta tarifa corresponde a los llamados “clientes regulados”, cuya potencia conectada es inferior a 500 kW. Los precios se fijan mediante los decretos de “precio de nudo” que emite la Comisión Nacional de Energía (CNE), perteneciente al Ministerio de Minería de Chile.

Para realizar el estudio de factibilidad económica de cada instalación, se consideró la recomendación de GIZ (2015), que propone evaluar los sistemas fotovoltaicos con una vida útil de 25 años, desde una perspectiva técnico-económica. Por lo cual se proyectó un flujo de caja con un horizonte de evaluación a 10 años, concordante con los contratos con las empresas compradoras de energías de Chile, considerando un valor desecho económico por los restantes años que faltan en el último periodo ($t=10$). Para calcular el Valor Actual Neto (VAN) y la Tasa Interna de Retorno (TIR), se consideró la tasa de descuento propuesta por el Ministerio de Energía del Gobierno de Chile (2017) de 8,74% para proyectos de tecnología solar fotovoltaica.

A partir de los resultados obtenidos, en términos de rentabilidad de rentabilidad privada, se realizó un análisis de sensibilidad sobre esta variable inversión inicial y flujos anuales, para ver de qué manera esta influye en la rentabilidad del proyecto.

En el caso de la valoración económica ambiental, se utiliza el estudio técnico anterior como base, cuantificando el monto de las inversiones, beneficios económicos y costos de operación (Sapag, 2007). El flujo en cada periodo se ve compensado con la incorporación de beneficios económicos provenientes de la simulación de ventas de “bonos de carbono”, como compensación y reconocimiento en la disminución de emisiones de gases a la atmósfera, para los cual es necesario un análisis de reducción de emisiones que permita el cálculo de huella de carbono por consumo eléctrico. En términos simples, la huella de carbono es el registro de gases de efecto invernadero (GEI) que empresas e individuos lanzan al planeta, ya sea directa o indirectamente. En Chile, el factor emisión de GEI utilizado para el territorio analizado, es el correspondiente al Sistema Interconectado Central (SIC) para el año 2016 equivalente a 0,397tCO₂/MWh. El trabajo no presenta por sí mismo cálculos del factor de emisión, sino más bien, el cálculo de emisiones del caso estudiado se simuló en una empresa dedicada al asesoramiento técnico en la compraventa de derechos de emisión por cuenta propia en la página CEROCO2 (<https://www.ceroco2.org/calculadoras/electric>), al cual se ingresaron los datos de las instalaciones FV con su respectiva capacidad de kW generados.

A su vez, para una empresa que reduce sus emisiones es posible estimar el valor económico de esta reducción de emisiones (Rivas & Cardemil, 2015), teniendo la opción de certificar los gases que no lanzó al medio ambiente y convertirlos en bonos de carbono o en Certificados de Emisiones Reducidas (CER). En Chile, según la Bolsa de Clima de Santiago SCX (<http://www.scx.cl>) un bono de

carbono o CER, es decir, una tonelada de CO₂ que se deja de emitir a la atmósfera, se transaba en un precio promedio de US\$ 12 (Rivas & Cardemil, 2015). Otro escenario es similar al “impuesto verde” que impone un pago de 5 US\$ por cada tonelada de CO₂ emitida por el Estado en Chile. Es importante precisar que los ingresos por venta de bonos de carbono son calculados solo para un año y replicados en los años siguientes, con lo cual no se considera las posibles variaciones del factor de emisión en la matriz energética.

3. RESULTADOS

De las 24 instalaciones certificadas por la SEC, 33% de las instalaciones corresponden al territorio de la empresa eléctrica COPELEC y un 67% la empresa CGE. Asimismo, respecto al tipo de proyecto, un 8,3% de total de instalaciones corresponde al sector agrícola, un 4,2% al sector industrial, un 8,3% al comercio y un 79,2% al sector habitacional.

Ahora bien, al revisar la inversión por sector en kilowatts (potencial), la distribución porcentual cambia. El 22,5% de inversión la concentra el sector agrícola, 29% el comercio, 14,2% en el sector industrial, en tanto el sector habitacional, el que posee mayor número de instalaciones (19), llega en total a un 34,3% de inversión en kilowatts. En coherencia con los datos anteriores, en términos económicos la mayor inversión se ha realizado en el sector habitacional que representa el 35,3% del total ejecutado en el periodo, en seguido por los sectores comercio con un 27,6%, agrícola con un 23,7% y por último el industrial que concentra una inversión monetaria del 13,4%. Se destaca que el promedio de inversión para producir un kilowatt es de CLP\$ 1.811.259, equivalente a US\$ 2.703,42¹. El mayor costo de instalación es en el sector agrícola con una inversión promedio por kilowatts de CLP\$ 1.908.932 (US\$ 2.849,2), siendo un 5,4% mayor al promedio total. En tanto, el del menor costo se ve reflejado en el sector industrial con CLP\$ 1.719.359 (US\$ 2.566,2), lo cual significa un 5,1% menos que el promedio.

Sin embargo, y en coherencia con lo señalado en la metodología de las 24 instalaciones fotovoltaicas antes mencionadas, solo 17 de estas instalaciones fueron incluidas en el estudio financiero (Tabla 2), excluyendo 7 instalaciones; 3 de ellas recientemente conectadas y 4 sin conexión al sistema de distribución, no existiendo aun registro de la generación de energía eléctrica determinante que fije un comportamiento, dato necesario para obtener una generación promedio de la instalación.

Cabe destacar que de 17 instalaciones en operación (Tabla N° 2), la mayor cantidad se concentra en el sector habitacional (13), asimismo es la que presenta el mayor costo de inversión por kilowatts con CLP\$ 1.884.138 (USD\$ 2.812,1), siendo un 4,7% más que el promedio general (CLP\$ 1.800.123 = USD\$ 2.686,75). En tanto, el sector industrial presenta el menor el costo de inversión por kilowatts alcanzando los CLP\$ 1.719.359 (USD\$ 2.566,2), un 4,5% menos que el promedio.

² Tipo de Cambio CLP\$ 670 = 1 US\$ americano

Tabla 2. Instalaciones activas y con venta de energía

Sector	Nº	Potencia (kW)	Inversión en CLP\$	Costo inversión por kW en CLP\$
Agrícola	1	29,40	54.589.498	1.856.786
Comercio	2	41,00	70.676.965	1.723.828
Industrial	1	20,00	34.387.186	1.719.359
Habitacional	13	36,63	69.015.959	1.884.138
Total	17	127,03	228.669.608	1.800.123

Fuente: elaboración propia

Al realizar la evaluación económica del proyecto, en la Tabla 3 se muestra el comportamiento total de las 17 instalaciones en operación y por sector, donde se puede observar que el ingreso económico se tributa por dos vías, una a través del ahorro mensual del cliente obtenido del menor consumo de electricidad producto de la instalación de los paneles fotovoltaico y la otra vía es por la inyección de los excedentes de energía eléctrica generados por el cliente hacia la red de la empresa eléctrica. Estas dos vías de ingresos se suman y se consolidan en un ingreso anual por sector. La información respecto a los consumos promedios mensuales antes y posterior a la conexión de las instalaciones fotovoltaicas se obtuvieron de las empresas eléctricas que suministran energía a los clientes y que a la vez pagan los excedentes de energía inyectados a la red, reconociendo el promedio móvil por cada sector.

Tabla 3. Proyecciones económicas de costos e ingresos

Sector	Ahorro energía (kWh/mes)	Ahorro mes (CLP\$)	Energía inyectada (kW/h mes)	Ingreso energía vendida (CLP\$)	Ingreso promedio año (CLP\$)
Agrícola	-836,0	0	1.610,0	125.580	1.506.960
Comercio	-177,0	0	2.917,0	227.526	2.730.312
Industrial	236,0	29.500	823,0	93.694	1.124.328
Habitacional	827,0	126.250	2.801,0	344.728	4.136.736
Suma	50,0	155.750	8.151,0	791.528	9.498.336

Fuente: elaboración propia

Al analizar cada sector y a su vez las dos vías de ingreso (ahorro e inyección al sistema), se puede apreciar que el sector agrícola y comercio, no tienen ingresos por concepto de ahorros de energía, debido a que posterior a la conexión de las instalaciones fotovoltaicas, ambos sectores inclusive evidenciaron un aumento en sus consumos mensuales de energía. Sin embargo, se puede observar que la inyección mensual de energía al sistema es alto respecto a los otros sectores del estudio, con un promedio de 1.610 kWh/mes para el sector agrícola y 2.917 kWh/mes para el sector comercio, esto se puede deber a que la potencia instalada es superior respecto a los otros sectores. Ahora bien, para el sector industrial y habitacional, se aprecia que existe ingreso por concepto de ahorro y de inyección de excedentes de energía, pero ambos ingresos son bastante marginales respecto a las inversiones iniciales. Para el sector residencial podemos observar que existen ingresos por ambas vías, destacando la inyección a la red (2.801,0 kWh/mes) por sobre el ahorro mensual (827,0 kWh/mes), además se aprecia que el consolidado anual corresponde al mayor ingreso registrado de todos los sectores de estudio, a pesar de ser el sector con la menor potencia instalada por cliente.

3.1 Rentabilidad Privada

Con los datos entregados por los actores involucrados, correspondiente a las 17 instalaciones en estudio, en la Tabla 4, se construyó la proyección de rentabilidad asociada a cada sector y en su totalidad.

De acuerdo con lo observado en la Tabla 4, el Valor Actual Neto (VAN) resulta negativo para todos los sectores, es decir, bajo estas condiciones se puede inferir que no es rentable realizar este tipo de proyectos en forma privada, debido a que los flujos de ingreso anuales obtenidos son muy bajos respecto a la inversión inicial realizada, teniendo en consideración que los costos de la inversión inicial son valores de mercado.

Tabla 4. Rentabilidad económica privada

Sector	Flujo periodo CLP\$ (t=1...t=10)	Valor Desecho Económico t=10 CLP\$	VAN (CLP\$)	TIR
Agrícola	1.506.960	17.242.105	-37.347.393	-6,2%
Comercio	2.730.312	31.239.268	-39.437.697	-2,3%
Industrial	1.124.328	12.864.165	-21.523.021	-4,3%
Habitacional	4.136.736	47.331.076	-21.684.883	3,3%
Suma	9.498.336	108.676.613	-119.992.995	-1,4%

Fuente: elaboración propia

3.2 Sensibilización de los proyectos con subsidio a la inversión inicial

Con los datos entregados por los propios actores (17) y en coherencia con los resultados anteriores que dan un resultado económico adverso, en la Tabla 5 se simuló el subsidio necesario a la inversión inicial que permitiría la rentabilidad mínima exigida (8,74%), pudiendo establecer que es necesario un subsidio base del 52,5% promedio, siendo la menor necesidad en el sector habitacional con un 31,4% y el de mayor ayuda el sector agrícola con un 68,4% de subsidio directo.

Tabla 5. Sensibilización con subsidio a la inversión Inicial

Sector	Inversión inicial CLP\$	Subsidio CLP\$	% Subsidio
Agrícola	54.589.498	37.347.393	68,4%
Comercio	70.676.965	39.437.697	55,8%
Industrial	34.387.186	21.523.021	62,6%
Habitacional	69.015.959	21.684.883	31,4%
Suma	228.669.608	119.992.995	52,5%

Fuente: elaboración propia

3.3 Sensibilización de los proyectos con subsidio a la tarifa mensual

Alternativamente al escenario anterior de subsidio a la inversión, se estimó un escenario que subsidiara los ingresos anuales, encontrando para la rentabilidad mínima exigida por los proyectos que es necesario un subsidio del 110,4%. Coincidentemente con la evaluación anterior, es en el sector habitacional donde se necesita menos subsidio a los precios con un 45,8%. En tanto el sector agrícola, bajo estas condiciones, necesitaría un subsidio anual del 216,6% al precio. Véase Tabla 6.

Tabla 6. Proyección de rentabilidad con subsidio al precio

Sector	Flujo por periodo CLP\$ (años t= 1...t=10)	Subsidio estimado al flujo anual CLP\$	% Subsidio
Agrícola	1.506.960	3.264.162	216,6%
Comercio	2.730.312	3.446.855	126,2%
Industrial	1.124.328	1.881.112	167,3%
Habitacional	4.136.736	1.895.259	45,8%
Suma	9.498.336	10.487.388	110,4%

Fuente: elaboración propia

3.4 Rentabilidad con valoración económica ambiental

Tal como se señaló en la metodología, teniendo como base los datos base de la evaluación privada, se agregaron al flujo económico anual, la simulación de ingresos por “bonos de carbono” con una emisión de gases (GEI), equivalente para la generación anual (118.639 kW) considerando la conversión de kW a MW, obtenemos una emisión equivalente de 47,10 tCO₂ por MW, a US\$ 12 por tonelada. En la Tabla 7, se construyó la proyección asociada a cada sector y en su totalidad.

Tabla 7. Rentabilidad social paneles FV

Sector	tCO ₂	Flujo Privado CLP\$ (t= 1...t=10)	Flujo Bonos de Carbono CLP\$ (t= 1...t=10)	VAN Social (CLP\$)	TIR Social
Agrícola	10,90	1.506.960	87.636	-36.344.693	-5,6%
Comercio	15,20	2.730.312	122.208	- 38.039.436	- 1,8%
Industrial	7,42	1.124.328	59.657	- 20.840.449	- 3,7%
Habitacional	13,58	4.136.736	109.183	- 20.435.648	3,6%
Suma	47,10	9.498.336	378.684	115.660.226	- 1,0%

Fuente: elaboración propia

De acuerdo con lo observado en la Tabla 7, el efecto de incorporar el “Bono de Carbono” a la simulación de flujos de cada periodo, el Valor Actual Neto (VAN) para una valoración ambiental no mejoró de manera significativa. Ahora bien, al sensibilizar la variable precio por tonelada de carbono resulta bajo como valor compensatorio.

4. DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Los resultados económicos dan cuenta que los proyectos analizados para este estudio caso de menor escala, desde la perspectiva privada, no son rentables en ninguno de los sectores estudiados, obteniendo un VAN negativo y por ende, una TIR no aceptable. Este deficiente desempeño económico puede ser explicado por varios factores, por ejemplo, un alto costo de la inversión inicial para la generación de energía fotovoltaica que aún es difícil recuperar con los flujos que se generan y aunque el costo ha disminuido en los últimos años, todavía es necesario un menor valor para hacer más atractivos este tipo de proyectos y por ende, se necesita algún tipo de incentivo (Correa, Marulanda & Panesso, 2016). Asimismo, se puede pensar que los proyectos en ejecución, tienen un problema de eficiencia técnica que se traduce en una baja generación eléctrica y por lo tanto, no han alcanzado el nivel de desempeño con el cual fueron diseñados, atribuibles a temas técnicos como ubicación, falta de mantención, deficiencias en la operación, entre otros.

Además, se observó un fenómeno que afectó a todas las instalaciones en forma transversal, que fue el aumento en el consumo de energía, posterior a la conexión de la instalación fotovoltaica, este cambio de comportamiento puede ser base para un estudio posterior, pero una hipótesis que se puede establecer es la interpretación de los clientes, que el hecho de generar su propia energía da cierta libertad de consumo y se dejan de lado las auto restricciones previamente existentes.

De acuerdo al estado de desarrollo de los proyectos estudiados, es evidente que es necesario un subsidio en la inversión inicial o en los precios (tarifa de transferencia), tal como se realiza en otras latitudes, especialmente en Europa (Durán, 2013). Existiendo distintos incentivos y/o mecanismos de promoción, tales como el “*Fett in Tarif*” (fijación de tarifa), compra de “*certificados verdes*”, sistemas de incentivos a la producción de ERNC, entre otros. Lo que se hace evidente, es que el tipo y nivel de incentivos deben determinarse cuidadosamente en los procesos de formulación de políticas públicas que permitan promover de manera efectiva los sistemas fotovoltaicos (Zhang, Knizley & Cho, 2017), especialmente con los hallazgos encontrados donde el sector habitacional es el que menos subsidio necesitaría. En cambio, el sector agrícola supone un mayor apoyo económico; ya que debe considerar elementos constructivos para soportar la instalación fotovoltaica y que se evidencian en el mayor costo promedio de inversión por kilowatts entre los distintos sectores estudiados, coincidente con los estudios de González (2014) donde establece que el costo total de instalación puede alcanzar hasta el 40%.

También se puede establecer una crítica al precio de compra del kilowatts (tarifa) por parte de las empresas eléctricas, ya que se puede inferir e asimetrías de información, ya que no se conocen las estructuras de costos reales, significando un desincentivo a generar electricidad limpia a menor escala.

Los resultados para este estudio de caso, hacen suponer que se mantiene la premisa observada en estudios anteriores de otras latitudes, donde se establece que los sistemas fotovoltaicos poseen una mayor inversión inicial pero sus costos de producción energética unitaria son menores a otras fuentes energéticas, por lo tanto, generan una mayor rentabilidad a mediano y largo plazo (Mahmoud & Ibrik, 2006).

5. CONCLUSIONES

Se plantea que la energía solar fotovoltaica es una buena alternativa a los problemas de generación del país, generando beneficios de operación y confiabilidad de la red, pero más aún sus externalidades positivas al medio ambiente y su impacto social. Se identifican distintos actores en la producción fotovoltaica, grandes y pequeños. En estos últimos, los de generación distribuida son clave para la competitividad del sector. Sin embargo, al evaluar económicamente estos proyectos desde una perspectiva privada, es decir sin presencia del Estado, los proyectos acogidos a la Ley 20.571 muestran para el caso en estudio que no son rentables.

Los resultados obtenidos muestran, a partir de su actual condición de operación, que no son atractivos

económicamente para los inversores. Estos resultados son coincidentes con los estudios de Recalde (2017) para Argentina, quien concluye que no obstante se reconoce la importancia de promover las energías renovables y su potencial para el impacto ambiental, aún enfrentan el problema de mayores costos y menor rentabilidad relativa que las tecnologías convencionales maduras, lo que ha dificultado su difusión en todo el mundo. Por ello si el objetivo del gobierno en Chile es promover la generación distribuida, es preciso concebir estrategias necesarias para generar rentabilidad de este tipo de proyectos. Las fórmulas elegidas pueden ser variadas, tal como el subsidio a la instalación o a la tarifa. Lo que no está en discusión, es que el gobierno pretenda incentivar la generación distribuida y a la vez deje al mercado como ente regulador, sabiendo que los resultados no pueden ser otros que una ambigüedad. Sabemos que Chile es un país inmerso en el sistema de libre mercado, donde el Estado interviene lo menos posible en los mercados, pero si se desea promover esta industria, se hace necesario replicar buenos ejemplos como España y Alemania, quienes incentivan la generación distribuida por medio de estrategias tales como la fijación de tarifas o subsidios a la inversión (Jiménez, 2011), especialmente en sectores residenciales. Sin la intervención del Estado apoyando económicamente esta incipiente industria, todo quedará en una promesa que apuntaba a incentivar una nueva forma de generar energía a pequeña escala y que desarrollaría tras ella una nueva industria movida por emprendedores.

Una última preocupación viene dada por las señales de la autoridad de gobierno que está promoviendo un proyecto de ley que modifica la actual Ley 20.571 (Ministerio de Energía del Gobierno de Chile, 2018), dentro de los alcances de esta modificación, está el limitar el pago de los excedentes inyectados, acumulándolos en la cuenta y descontando del consumo del cliente, así solo se cancelarían las inyecciones de aquellos clientes cuyos excedentes superen los consumos generados en un periodo de tiempo equivalente a cinco años. Lo anterior, puede provocar un desincentivo en la inversión de pequeños fuentes de generación, que puede llevar a destruir esta insipiente industria.

A pesar de que las evaluaciones ex post de los casos estudiados de generación distribuida no son los esperados desde la perspectiva privada e incluyendo la valoración económica ambiental. Es importante enfatizar, de que la región necesita implementar proyectos en base a energías renovables, considerando por un lado políticas de incentivo estatal directo a los inversionistas y posibilidades de financiamiento creciente a través de los bonos de carbono. Teniendo claro y como lo ha establecido la literatura, que a pesar de utilizar instrumentos más o menos similares los países avanzan en distintos grados debido a factores políticos, económicos e institucionales que enmarcan las decisiones de política, por lo cual es importante avanzar a ciudades más responsables con su medio ambiente, generando acciones concretas para un mayor educación, concientización ecológica, regulación de consumos, entre otras medidas.

Asimismo, es importante enfatizar las limitaciones de estudio en cuanto a plantear una perspectiva económica-financiera a un tema de alta complejidad, pudiéndose en estudios futuros incorporar efectos tributarios por tipo de inversionista o más

interesante aún, comparar este modelo con el método de “costo medio de generación” para cada proyecto fotovoltaico, conocido como LCOE (levelized costo of energy), tanto a nivel local o regional.

REFERENCIAS

- Ackermann, T., Andersson, G. & Söder, L. (2001). Distributed generation: a definition. *Electric Power System Research*, 57, 195-204.
- Amorós, J. M., & Micaló, P. R. (2005). *El valor de la fijación de carbono en los programas de forestación*. Boletín económico de ICE, (2834), 13-28.
- Azqueta Oyarzun, D. (1994). *Valoración económica de la calidad ambiental*. McGraw-Hill, Madrid.
- Behnke, D. R. P., Estévez, G. J., & Arias, I. A. (2009). *Las Energías Renovables No Convencionales En El Mercado Eléctrico Chileno*. Proyecto Energías Renovables No Convencionales (CNE/GTZ), 124.
- Bermejo, R. (2013). Ciudades Postcarbono y Transición Energética. *Revista de Economía Crítica*, 16, 215-243.
- Correa F., C.A.; Marulanda G., G.A. & Panesso H., A.F. (2016). Impacto de la penetración de la energía solar fotovoltaica en sistemas de distribución: estudio bajo supuestos del contexto colombiano. *Revista Tecnura*, 20(50), 85-95. doi: 10.14483/udistrital.jour.tecnura.2016.4.a06
- Cruz, I., Muñoz, M., Sauad, J., Altobelli, F. & Condori, M. (2016). *Evaluación financiera y económica de la sustitución parcial de fuentes convencionales por energía solar en un proceso industrial. Estudio de caso: la inclusión de energía solar en el Curado de tabaco*. Acta de la XXXIX Reunión de Trabajo de la Asociación Argentina de Energías Renovables y Medio Ambiente. 4, 12115-12125.
- Dalmazzo-Bermejo, E., Valenzuela-Klagges, B. & Espinoza-Brito, L. (2017). Producción de energía renovable no tradicional en América Latina: economía y políticas públicas. *Apuntes*, 44(81), 67-87. <https://dx.doi.org/10.21678/apuntes.81.806>
- Durán, R. (2013). *Mecanismos de promoción de energías renovables, comparación de sus aplicaciones en Europa, Latinoamérica y Argentina de acuerdo a sus características político económicas*. Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente, Actas ASADES 2013. 17, 43-49.
- GIZ (2015). *Modelo de Negocios ESCO para la Generación de Energía Fotovoltaica*. Deutsche Gesellschaft für Internationale Zusammenarbeit (GIZ) GmbH. [En línea] Available at: www.4echile.cl/asset/documents/688

- González, D. (2014). *Tesis Doctoral, Modelo de innovación y optimización de la energía solar en España. La aplicación de las tecnologías disponibles para el aprovechamiento de recursos, comercialización y beneficios de la energía solar*, Universidad Rey Juan Carlos, España, 212 pág.
- Jacobs, D., Marzolf, N., Paredes, J. R., Rickerson, W., Flynn, H., Becker-Birck, C., & Solano-Peralta, M. (2013). Analysis of renewable energy incentives in the Latin America and Caribbean region: The feed-in tariff case. *Energy Policy*, 60, 601-610. doi:10.1016/j.enpol.2012.09.024.
- Jager-Waldau, A. (2007). Photovoltaics and renewable energies in Europe. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 11, 1414-1437
- Jiang, L., & O'Neill, B. C. (2004). The energy transition in rural China. *International Journal of Global Energy*, 21(1-2), 2-26. DOI: 10.1504/IJGEI.2004.004691
- Jiménez, S. (2011). Energía Renovable No Convencional: Políticas de Promoción en Chile y el Mundo. *Libertad y Desarrollo*, 218, 1-60.
- Mahmoud, M., & Ibrik, I. (2006). Techno-economic feasibility of energy supply of remote villages in Palestine by PV-systems, diesel generators and electric grid. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 10 (2), 128-138. https://doi.org/10.1016/j.rser.2004.09.001
- Medina, J. (2010). La dieta de dióxido de carbono CO₂. *Conciencia y tecnología*, 39, 50-53.
- Mitscher, M. & Rüther, R. (2012). Economic performance and policies for grid-connected residential solar photovoltaic systems in Brazil, *Energy Police*, 49, 688-694.
- Ministerio de Economía, Fomento y Reconstrucción del Gobierno de Chile (2008). *Ley 20.257*. Introduce modificaciones a la ley general de servicios eléctricos respecto de la generación de energía eléctrica con fuentes de energías renovables no convencionales. Disponible en: <https://www.leychile.cl/Navegar?idNorma=270212>.
- Ministerio de Energía del Gobierno de Chile (2012). *Ley 20.571*. Regula el pago de las tarifas eléctricas de las generadoras residenciales. Disponible en: <https://www.leychile.cl/Navegar?idNorma=1038211>.
- Ministerio de Energía del Gobierno de Chile (2014). *Decreto que Modifica decreto supremo N° 71*, de 2014, del Ministerio de Energía, que aprueba reglamento de la Ley N° 20.571, que regula el pago de las tarifas eléctricas de las generadoras residenciales. Disponible en: http://www.minenergia.cl/archivos_bajar/consulta_ciudadana/2016/05/netmetering/consulta.pdf
- Ministerio de Energía del Gobierno de Chile (2017). *Informe final: Méritos económicos, riesgos y análisis de competencia en el mercado eléctrico chileno de las distintas tecnologías de generación de electricidad*, ASSET, 136 p.
- Ministerio de Energía del Gobierno de Chile (2018a). *Modifica Decreto Supremo N° 71, de 2014*, Ministerio de Energía, Reglamento de la Ley N° 20.571.
- Ministerio de Energía del Gobierno de Chile (2018b). *Energía 2050 política energética de Chile*. Disponible en: http://www.minenergia.cl/archivos_bajar/LIBRO-ENERGIA-2050-WEB.pdf
- Müller-Steinhagen, H., & Nitsch, J. (2005). The contribution of renewable energies to a sustainable energy economy. *Process Safety and Environmental Protection*, 83(4), 285-297. https://doi.org/10.1205/psep.05084.
- Ovalle-Cubillos, R. (2014). Sociedad fotovoltaica. *Ingeniare. Revista Chilena de Ingeniería*, 22(1), 4-5. DOI: 10.4067/S0718-33052014000100001
- Painuly, J. P. (2001). Barriers to renewable energy penetration; a framework for analysis. *Renewable energy*, 24(1), 73-89.
- Palma, R., Jiménez, G. & Alarcón, I. (2009). Las Energías Renovables No Convencionales En El Mercado Eléctrico Chileno. *Proyecto Energías Renovables No Convencionales*, 1, 1-124.
- Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea (2009). Directiva 2009/28/CE relativa al fomento del uso de energía procedente de fuentes renovables y por la que se modifican y se derogan las Directivas 2001/77/CE y 2003/30/CE. *Diario Oficial de la Unión Europea*, 140, 16-62.
- Posso, F., Acevedo, J., & Hernández, J. (2014). El impacto económico de las energías renovables. *Revista de investigación en administración e ingeniería*, 2 (2), 49-54.
- Plá, J., Bolzi, C. & Durán, J.C (2018). Energía Solar Fotovoltaica. Generación Distribuida conectada a la red. *Ciencia e Investigación*, 68(1), 51-64.
- Recalde, M. (2017). La inversión en energías renovables en Argentina. *Revista de Economía Institucional*, 19(36), 231-254. https://dx.doi.org/10.18601/01245996.v19n36.09
- Rivas, R. T., & Cardemil, J. M. (2015). Evaluación de la contribución de los bonos de carbono a la competitividad de las centrales solares de concentración en Chile. *Ingeniare. Revista Chilena de Ingeniería*, 23(4), 609-621. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-33052015000400011

Rüther, R. & Zilles, R (2011). Making the case for grid-connected photovoltaics in Brazil. *Energy Policy*, 39 (3), 1027-1030. <https://doi.org/10.1016/j.enpol.2010.12.021>.

Salazar-Peralta, A., Pichardo-S, A. & Pichardo-S, U. (2016). La energía solar, una alternativa para la generación de energía renovable. *Revista de Investigación y Desarrollo*, 2(5), 11–20.

Sanz-Casado, E., Lascurain-Sánchez, M., Serrano-López, A., Larsen, B. & Ingwersen, P. (2014). Production, consumption and research on solar energy: The Spanish and German case. *Renewable Energy*, 68, 733-744.

Sapag Chain, N. (2007). *Proyectos de inversión: formulación y evaluación*. Pearson Educación de México SA, México.

Simsek, Y., Mata-Torres, C., Guzmán, A. M., Cardemil, J. M., & Escobar, R. (2018). Sensitivity and Effectiveness Analysis of Incentives for Concentrated Solar Power Projects in Chile. *Renewable Energy*. 129 (A), 214-224.

World Economic Forum (2017). *Informe Energía*, Disponible: <https://es.weforum.org/agenda>

Zhang, J., Knizley, A., & Cho, H. (2017). Investigation of existing financial incentive policies for solar photovoltaic systems in US regions. *Aims Energy*, 5(6), 974-996. DOI:10.3934/energy.2017.6.974

Zurita, A., Castillejo-Cuberos, A., García, M., Mata-Torres, C., Simsek, Y., García, R., & Escobar, R. A. (2018). State of the art and future prospects for solar PV development in Chile. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 92, 701-727.



Luis Améstica-Rivas. Dr. en Administración y Dirección de Empresas, Universidad Politécnica de Cataluña, España, MBA – Magíster en Administración mención en Gestión Financiera, U. de Chile. Académico Departamento de Gestión Empresarial, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad del Bío-Bío, Chile.

Profesor de finanzas y proyectos en distintas universidades chilenas en pre y postgrado. Ha sido gerente de finanzas y de empresas, consultor y directivo universitario. Investigador asociado grupo de investigación en Dirección Universitaria de la Universidad Politécnica de Cataluña, España. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0482-0287>



María Beatriz Piderit Moreno. Arquitecta, Magister en Ciencias Aplicadas y Doctor de la Universidad Católica de Lovaina, Bélgica. Docente de la Facultad de Arquitectura, Construcción y Diseño de la Universidad del Bío-Bío. Especialista del área de la Arquitectura Sustentable, ha desarrollado investigación y proyectos en el área de la Iluminación Natural, Espacios

Educativos y Confort Ambiental. Directora del programa del Magister Hábitat Sustentable y Eficiencia Energética, además se desempeña como docente del Doctorado Arquitectura y Urbanismo de la Universidad del Bío-Bío. Investigadora activa del Centro de Investigación en Tecnologías de la Construcción de la Universidad, ha participado en diferentes proyectos de investigación y desarrollado publicaciones en revistas científicas del área. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9733-6608>

BIOGRAFÍAS



Luis Arturo Cisterna Arellano. Magíster en Gestión de Empresa de la Universidad del Bío-Bío e Ingeniero en Electricidad de la Universidad de La Frontera de Chile. Actualmente (6 años) se desempeña en la Superintendencia de Electricidad y Combustibles del Ministerio de Energía de Chile, además cuenta con 14 años de desarrollo profesional en Empresas

Concesionarias de Distribución de Energía Eléctrica. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5793-9973>

Impacto de los Métodos Aplicados para la Determinación de la Permeabilidad y su Influencia en el Gerenciamiento del Reservorio en el Campo Shushufindi

Guamialamá, Carlos ^{1*} ; Freire, José ² ; Valencia, Raúl ¹ 

¹Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería en Petróleos, Quito, Ecuador

²Schlumberger del Ecuador S.A., Production Management, Quito, Ecuador

Resumen: Permeabilidad es una de las principales propiedades en la caracterización de yacimientos, así como para la estimación de la productividad de un pozo. Existen diversos métodos para su determinación durante diferentes etapas de desarrollo de un campo. Todos los métodos difieren en algunos aspectos como el tipo de permeabilidad que determinan ya sea absoluta o efectiva, radio de investigación, tecnología utilizada, fundamentos teóricos y desventajas encontradas durante la adquisición y estimación de esta propiedad. En este trabajo se determinó las distribuciones de permeabilidad y se comparó entre los métodos núcleos-registros eléctricos, registros eléctricos-probadores de formación y pruebas de presión-análisis transiente de producción. A partir de estas comparaciones, se identificaron las diferencias en los valores de permeabilidad así como las diferencias en las escalas de medición. Una vez establecidos los valores de permeabilidad a partir de cada método, se realizó un análisis e interpretación, determinando una productividad teórica de cada uno de ellos, y comparándola con datos de producción real se estableció el mejor método para la estimación de esta propiedad para el campo Shushufindi.

Palabras clave: Permeabilidad, núcleos, registros, productividad, pruebas de presión.

Impact of the Applied Methods for the Determination of Permeability and its Influence in the Management of the Reservoir in Shushufindi Field

Abstract: Permeability is one of the main properties in reservoir characterization, as well as for the estimation of the productivity of a well. There are several methods for its measurement or calculation during different stages of development of a field. All these methods differ in some aspects such as the type of permeability that they determine whether absolute or effective, volume of observation, technology used, theoretical foundations and inconveniences encountered during the acquisition and estimation of this property. In this work, permeability distributions were determined, and the methods were compared with core-well logs, well logs-wireline formation testers and pressure transient analysis - rate transient analysis. From these comparisons, it was possible to identify the differences in the permeability values as well as the differences in the measurement scales. Once the permeability values were established from each method, an analysis and interpretation were made to determine a theoretical productivity of each of them, then they were compared with real production data in order to establish the best method for estimating this property for Shushufindi field.

Keywords: Permeability, core, well logs, productivity, well test.

1. INTRODUCCIÓN

El campo Shushufindi está ubicado en la Cuenca Oriente del Ecuador (López et al, 2015), fue descubierto en 1969 con la perforación del pozo Shushufindi 1. La producción del campo arrancó en agosto de 1972 alcanzando su pico en agosto de 1986 con un promedio diario para ese mes de 126 400 barriles. Shushufindi es considerado uno de los campos gigantes del

Ecuador y la perfección de su sistema le ha permitido entregar a Ecuador la mayor riqueza natural, sobrepasando en los primeros meses del año 2002 los 1000 millones de barriles de producción acumulada de alrededor de 42 años. Para el año 2013, sobrepasaba ya los 1200 millones de barriles provenientes en orden de importancia del reservorio T (65%), U (35%) y Tena Basal (<1%). El Campo Shushufindi presenta una secuencia sedimentaria y volcánica, de edades del

*carlos.guamialama@epn.edu.ec

Recibido: 21/08/2019

Aceptado: 29/04/2020

Publicado: 31/05/2020

10.33333/tp.vol45n2.04

CC BY 4.0

Paleozoico al Cuaternario, con una profundidad que oscila entre los 8.000 a 12.000 [ft], que descansan sobre un substrato precámbrico. Las principales rocas reservorio, involucran facies de la formación Napo de edad Cretácico Inferior y areniscas zona U y T. La composición de estas areniscas es principalmente cuarzosa de grano fino a medio, de regular a buena selección. El cemento es silíceo o calcáreo y la matriz arcillosa, con presencia de glauconita en los miembros superiores (Baby et al, 2014).

Históricamente este campo no ha dado mayores problemas en su operación gracias a la nobleza de los reservorios y a la perfección de sus mecanismos de empuje, sin embargo, en la actualidad plantea un reto mayor, determinar cuál es el régimen óptimo de producción y recuperación mejorada para su etapa de madurez, lo cual constituye a la permeabilidad como una de las propiedades más importantes en la determinación del potencial de producción de un pozo, caracterización del reservorio, así como para la simulación de modelos dinámicos.

La permeabilidad ha llegado a ser percibida por la industria como una de las propiedades más desafiantes de determinar. Las dificultades pueden ser atribuidas fundamentalmente a su naturaleza, la cual es una función de la dirección, volumen de investigación, así como de las interacciones roca-fluido y fluido-fluido. La principal influencia de la permeabilidad se evidencia en el movimiento de fluidos, además es uno de los datos de entrada utilizados para los modelos de simulación usados en la predicción de producción.

Cuanto más real sean los modelos de simulación, esto permitirá la integración de los datos de permeabilidad obtenidos a partir de diferentes métodos, el grado de confiabilidad puede ser situado en la habilidad para predecir la producción de un pozo, así como el comportamiento de un reservorio.

Ninguno de los métodos disponibles para determinar la permeabilidad, sean estos análisis de núcleos, registros eléctricos, probadores de formación con cable, pruebas de pozos, y análisis transiente de producción, pueden trabajar individualmente (Al-Harbi et al, 2007).

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Definición de permeabilidad

Permeabilidad es la medida de la habilidad que tiene una roca para transmitir fluidos, medida típicamente en milidarcies, la cual es la milésima parte de un Darcy. Un Darcy describe la permeabilidad de un medio poroso a través del cual se produce el paso de un centímetro cúbico de fluido que tiene un centipoise de viscosidad y fluye en un segundo bajo una presión diferencial de una atmósfera, donde el medio poroso expone un área en sección transversal de un centímetro cuadrado y una longitud de un centímetro (Schlumberger, 2019).

Se han definido tres conceptos de permeabilidad: absoluta, propiedad intrínseca de la roca cuando está saturada al cien por ciento por un fluido de una sola fase; efectiva, medida en

referencia a un fluido cuando la roca está saturada por un fluido multifásico, y relativa, relación entre la permeabilidad efectiva y absoluta (Sullivan et al, 2008).

Para estimar la permeabilidad, lo podemos hacer a diferentes escalas; mediante pruebas de laboratorio efectuadas en núcleos. Se la infiere a gran escala a través de pruebas de pozos y datos de producción. También se la cuantifica a una escala intermedia mediante los probadores de formación operados con cable (Schlumberger, 2002).

2.2 Núcleos

Los datos de permeabilidad de núcleos son obtenidos de varios pozos, a medida que se perfora la zona de interés, estas constituyen una pequeña muestra en comparación al tamaño del yacimiento, es una manera directa de medir la permeabilidad de un medio poroso, esto independientemente del volumen de la muestra en relación al yacimiento en análisis (Al-Harbi et al, 2007).

Los análisis de rutina de núcleos proveen la permeabilidad absoluta o intrínseca, tanto horizontal como vertical, mientras que un análisis especial determina propiedades como las permeabilidades relativas (Schlumberger, 2002).

La permeabilidad puede determinarse en laboratorio midiendo la cantidad de fluido que pasa a través de una muestra cuando se aplica un diferencial de presión a lo largo de la misma, los instrumentos utilizados para este fin se denominan permeámetros. Los permeámetros cuentan con una cámara en la cual se ubica una muestra, usualmente un tapón de núcleo (que puede ser horizontal o vertical). La permeabilidad es medida haciendo pasar un fluido de viscosidad μ conocida a través de núcleos, al cual se le han medido las dimensiones (A y L). Luego se determina la tasa de flujo q y la caída de presión ΔP ; una vez obtenidos todos estos parámetros la permeabilidad es calculada con la ecuación 1 conocida como la ecuación de Darcy:

$$k = \frac{q\mu L}{A \Delta P} \quad (1)$$

Donde:

K = permeabilidad absoluta

q = caudal

μ = viscosidad

L = longitud del núcleo

A = área transversal del núcleo

ΔP = diferencial de presión

Un aspecto importante a considerar son las anomalías en los datos, esto debido a inconvenientes que ocurren durante el corte del núcleo en el laboratorio, la mayor parte de la muestra es invadida por el agua utilizada para su corte, la presencia de agua y la cortadora causan ciertos daños en las caras de los núcleos. El alisado del tope y la base del núcleo utilizando la cortadora causa reposicionamiento de los granos, estos granos causan la reducción de la permeabilidad, por otra parte si el agua utilizada para el corte del núcleo es incompatible con la estabilidad de las arcillas del núcleo, estas arcillas pueden hincharse causando cambios en la permeabilidad (Talabani et al, 1999).

2.2.1 Relación porosidad permeabilidad

El predictor de la permeabilidad más usado es la relación de Porosidad- Permeabilidad. Es reconocido que la mayoría de las rocas de los yacimientos presenta una porosidad primaria, la misma que en una escala semilogarítmica muestra una relación razonablemente lineal entre estas dos propiedades. Una buena práctica en la estimación de la permeabilidad consiste en la separación en grupos o categorías que muestren un comportamiento más homogéneo (Castillo y Ortega, 2016).

2.2.2 Efecto Klinkenberg

Las mediciones de permeabilidad se restringen a regiones de bajas tasas de flujo (flujo laminar). En casos de altas tasas de flujo, la ecuación de Darcy no es adecuada para describir la relación entre la tasa de flujo y la caída de presión (Torbello, 2012).

2.3 Registros eléctricos

Los registros se han convertido en una herramienta fundamental para la evaluación de formaciones, son corridos una vez culminada la etapa de perforación de un pozo. Los registros se basan en la medición de propiedades físicas, con una amplia variedad de herramientas, no existe un registro geofísico específico para la determinación directa de la permeabilidad, pero es posible su determinación mediante el análisis de registros convencionales (Shokir et al, 2006).

2.3.1 Métodos para la estimación de la permeabilidad a través de registros

El cálculo de la permeabilidad a partir de registros de pozos tiene varios métodos aplicables como *métodos empíricos*, *métodos estadísticos*, y *medidas virtuales*, haciendo uso de ecuaciones empíricas, múltiples regresiones variables y redes neuronales artificiales respectivamente (Mohaghegh et al, 1997).

La estimación de la permeabilidad con *métodos empíricos* se realiza mediante la aplicación de una variedad de correlaciones de varios autores como Coates, Tixier, Salazar, y Timur, todas estas correlaciones pueden ser simplificadas con la ecuación 2 (Bazara y Salman, 2009):

$$k = \left(\frac{a\phi^b}{S_{wi}^c} \right)^d \quad (2)$$

Donde:

K = permeabilidad absoluta [mD]

ϕ = porosidad

S_{wi} = saturación de agua irreductible

a, b, c, d = coeficiente y exponentes detallados en la tabla 1.

Tabla 1. Valores de coeficientes y exponentes métodos empíricos

Método	Coeficientes		Exponentes	
	a	b	c	d
Coates	100	2	1	2
Tixier	250	3	1	2
Salazar	4,22X10 ⁶	7,5	0,09	1
Timur	0,136	4,4	2	1

Las múltiples regresiones variables son un *método estadístico*, el cual busca una relación entre la permeabilidad de los núcleos con otros parámetros de los registros.

Las *redes neuronales* son una inteligencia artificial que se basa en un proceso secuencial y algorítmico, utiliza una amplia gama de procesos simples en lugar de utilizar un solo proceso complejo. Este consiste en un entrenamiento que se va propagando en la red neuronal, durante este entrenamiento se le proporciona problemas previamente resueltos que incrementan el conocimiento de la red, una vez finalizado este entrenamiento la red neuronal sea capaz de procesar datos de registros y dar como resultado el cálculo de la permeabilidad (Mohaghegh et al, 1997).

Los registros tienen un radio de investigación muy limitado como se muestra en la Figura 1, debido a la resolución de las herramientas empleadas para la toma de datos, además son influenciados por el factor de laminación y el filtrado de la zona invadida, pero con el principal beneficio de ser una medida continua (Cantini et al, 2013).

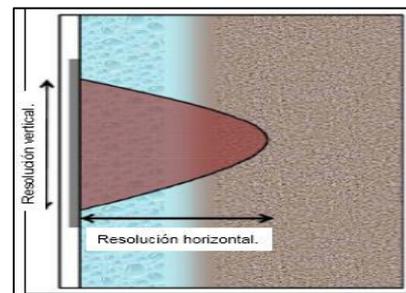


Figura 1. Radio de investigación herramientas de registros

2.4 Probadores de formación con cable

Los probadores de formación con cable (xpt) Figura 2, son utilizados principalmente en pozos recién perforados durante la corrida de registros convencionales para obtener parámetros de los intervalos de interés como: presión de la formación, movilidad, así como para recuperar muestras de fluidos de la formación. Previo a la toma de presiones puntuales con los probadores de formación se debe seleccionar los puntos con el apoyo de registros (aún sin interpretar) SP, GR y resistivos a fin de encontrar la zona de interés a evaluar. Este tipo de herramientas cuenta con un bloque que contiene un empaque sellador, opuesto a un brazo que abre a la profundidad de interés, forzando al bloque y al empaque sellador para que entren en contacto firme con la formación (Pérez, 2012).

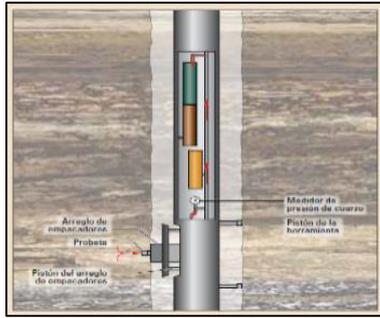


Figura 2. Configuración probador de formación con cable

La evaluación con la herramienta empieza con la extracción de un pequeño volumen de fluido, típicamente entre 5 y 25 centímetros cúbicos desde la formación hacia la cámara de la herramienta. La primera etapa es llamada drawdown la cual es una caída de presión que depende principalmente de la permeabilidad de la zona evaluada, la viscosidad del fluido, y la tasa de fluido que ingresa a la cámara. Si el punto evaluado tiene la suficiente permeabilidad se lleva a cabo una segunda etapa la cual toma datos de incremento de presión.

Los probadores de formación con cable ayudan al cálculo de la permeabilidad a partir de los datos drawdown o build up, la permeabilidad calculada es efectiva, principalmente esférica y ocasionalmente horizontal (Cantini et al, 2013).

Debido a que el disturbio de presión ocasionado por un probador de formación con cable tiene un radio de investigación muy corto, normalmente dicho disturbio se da dentro de la región donde es más probable que ocurra invasión de filtrado de lodo ya que la mayor parte de estas pruebas se realiza en pozos recién perforados (Schlumberger, 1996). Por lo tanto, la movilidad determinada con el análisis de los decrementos e incrementos de presión permite calcular la permeabilidad efectiva al filtrado de lodo en la zona de invasión. Sin embargo, se puede considerar como indicador cualitativo de productividad.

2.5 Análisis transiente de producción

Es una técnica relativamente nueva que permite determinar las características del yacimiento, sustentada en métodos empíricos básicos como Arps, Fetkovich, hasta el actual y moderno Blasingame. El análisis de estas curvas facilita la obtención de las propiedades como la permeabilidad efectiva del reservorio sin detener la producción de un pozo. Este método recopila datos diarios de pruebas de tasas de flujo y presión.

Las curvas de declinación de producción tienen dos funciones principales, la primera de ellas es la de determinar la permeabilidad efectiva mediante el empate de la curva de declinación de producción con las curvas tipo, otra función es en base a un diagnóstico, realizar una predicción de la producción (Sun, 2015).

En la actualidad uno de los métodos tradicionales consiste en la aplicación de las curvas tipo de Blasingame Figura 3.

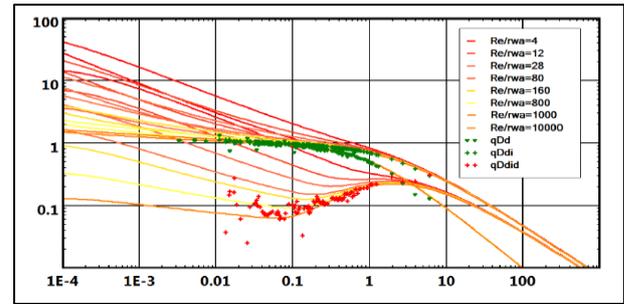


Figura 3. Curvas análisis transiente de producción

Para la determinación de la permeabilidad, se debe realizar el match point con la tasa de producción, una vez obtenido este punto, se aplica la ecuación 3 para estimar la permeabilidad:

$$k = \frac{\left(\frac{q}{\Delta p_p}\right)_M \mu \beta}{(q_{Dd})_M 2\pi h} \left(\ln r_{eD} - \frac{1}{2}\right) \quad (3)$$

Donde:

K = permeabilidad efectiva [mD]

$\left(\frac{q}{\Delta p_p}\right)_M$ = match point tasa de producción

μ = viscosidad [cp]

β = factor volumétrico petróleo [BF/BY]

q_{Dd} = tasa de producción [BPPD]

h = espesor de la arena [ft]

r_{ed} = radio de drenaje del pozo [ft]

2.5.1 Relación análisis transiente de producción y presión

Teóricamente, el análisis de los datos de producción transiente (RTA) es el mismo que se realiza en el análisis transiente de presión (PTA). Los métodos RTA y PTA comparten las mismas asunciones en términos de uso de la ecuación de la difusividad y condiciones de límite. La mayor parte de los modelos desarrollados para análisis PTA puede ser utilizada en el análisis RTA.

Tabla 2. Comparación PTA-RTA

	Análisis transiente de presión.	Análisis transiente de producción.
Bases Teóricas.	Mismas ecuaciones, superposición, y los mismos modelos numéricos y analíticos.	
Rango de tiempo.	Horas, días.	Semanas, meses, años.
Periodos de interés.	Principalmente en cierre de pozos.	Fases de producción.
Datos requeridos.	Medidas de pruebas de pozos. Pruebas de formación.	Datos de producción. Presión en superficie.
Área de interés del yacimiento.	Cualquier volumen e investigación alcanzada durante la prueba.	Área de drenaje del pozo.
Diagnósticos modernos.	Log-Log derivada de Bourdet.	Log-Log y Blasingame
Régimen de flujo de interés.	Flujo radial infinito.	Estado pseudo estacionario.
Resultados principales.	Kh y daño.	Kh y daño.
Capacidad de diagnóstico.	Alta a muy alta	Baja en promedio.

2.6 Pruebas de presión

Las pruebas de presión son una herramienta que se desarrolla a partir de la necesidad de conocer la dinámica del movimiento de los fluidos dentro del reservorio. A través del tiempo, fueron evolucionando, y adquiriendo técnicas que permitieron dar respuestas simples a problemas complejos.

La permeabilidad determinada de las pruebas de presión corresponde a la permeabilidad efectiva; se la calcula usando el análisis transiente de presión moderno, basado en la derivada de la presión versus el tiempo. Esta permeabilidad representa un promedio de esta propiedad en el área de drenaje, con una escala significativamente mayor que las obtenidas de núcleos o registros. Sin embargo, los valores calculados a partir de estas pruebas no son medidas directas de permeabilidad como las medidas tomadas de los núcleos. El dato estimado de estas pruebas, es el promedio de la capacidad de flujo del reservorio, más no el cálculo directo de permeabilidad (Sullivan et al, 2008):

$$kh = 141,2q\beta\mu \left(\frac{p_D}{\Delta p}\right)_{PC} \quad (4)$$

Donde:

K = permeabilidad efectiva [mD]

h = espesor de la arena [ft]

q = caudal de prueba [BPPD]

β = factor volumétrico petróleo [BF/BY]

μ = viscosidad [cp]

$\left(\frac{p_D}{\Delta p}\right)_{PC}$ = match point derivada de la presión

La permeabilidad es calculada a partir de la ecuación 4 conociendo el dato de espesor de la arena que se encuentra en el área de influencia de la prueba.

Si se tiene una variación anisotrópica a gran escala en el reservorio, la estimación de la permeabilidad por medio de pruebas de pozos, será un promedio geométrico de la permeabilidad como lo indica la ecuación 5.

$$k_G = \sqrt{k_{min} * k_{max}} \quad (5)$$

Donde:

K = promedio geométrico permeabilidad efectiva [mD]

k_{min} = permeabilidad mínima del volumen de investigación

k_{max} = permeabilidad máxima del volumen de investigación

Las pruebas de presión convencionales permiten detectar el grado de heterogeneidad, pero no se puede determinar la distribución de la permeabilidad y adicionalmente esta fuente carece de resolución vertical (Schlumberger, 2002).

Los problemas más comunes durante la interpretación de la derivada de datos build up son:

Efecto de *almacenamiento* el cual ocurre especialmente cuando el cierre del pozo se lo realiza desde superficie, ya que no se tiene un control inmediato del flujo; es decir, el cambio de la tasa al frente de la arena cambia más lento que la tasa en superficie.

Efecto de *segregación de fases* la cual ocasiona una distorsión de la derivada de la presión.

Efecto de *ruido* dificulta reconocimiento de los regímenes de flujo, volviéndolo complejo, lo que lleva a la elección errónea del modelo para la interpretación.

2.7 Comportamiento de afluencia de formaciones productoras

La determinación de las curvas IPR para pozos de petróleo es extremadamente importante en el análisis de sistemas de producción. Estas curvas son conocidas como la representación gráfica de las presiones fluyentes (Pwf) con la cual el yacimiento entrega en el fondo del pozo distintas tasas de producción (Q). Es decir, para cada Pwf existe una tasa de producción de líquido (Nind, 2010).

Cuando se dispone de la suficiente información se puede hacer uso de la ecuación 6 para la elaboración de las curvas:

$$J = \frac{0,00708 K_o h}{\mu_o \beta_o [Ln(r_w^e) - 0.75 + s]} \quad (6)$$

Donde:

J = índice de productividad

K = permeabilidad [mD]

h = espesor de la arena [ft]

μ_o = viscosidad [cp]

β_o = factor volumétrico petróleo [BF/BY]

r_e = radio de drenaje del pozo [ft]

r_w = radio del pozo [ft]

s = daño del pozo

2.8 Variogramas

La distribución espacial de las propiedades de la roca es un aspecto fundamental en el proceso de caracterización del reservorio. La geoestadística es una rama de las "estadísticas aplicadas" que intenta describir la distribución de una propiedad en el espacio, también se la conoce como estadísticas espaciales. Se supone que una propiedad distribuida espacialmente exhibe algún grado de continuidad. La porosidad y la permeabilidad son ejemplos de espacialidad. El modelado geoestadístico se refiere al procedimiento para determinar un conjunto de realizaciones del reservorio. Las realizaciones dependen tanto de las relaciones espaciales entre los puntos de datos como de su correlación estadística en función del espacio de separación.

Las relaciones espaciales asociadas con los datos se calculan y luego se modelan. Los puntos trazados forman el semivariograma experimental, y la línea que se ajusta a los puntos de datos se denomina modelo de semivariograma, la Figura 4 ilustra un ajuste a los datos por un modelo de semivariograma (Fanchi, 2018).

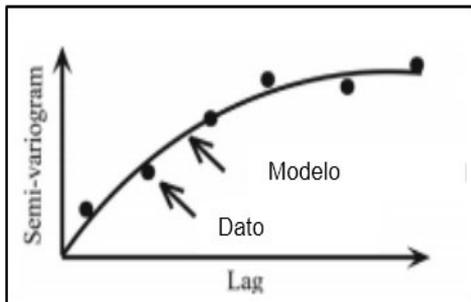


Figura 4. Variograma experimental

Un semivariograma es una gráfica de semivarianza versus rango. La función semivarianza de la ecuación 7 es una medida del grado de disimilitud entre los valores de un parámetro Z en dos ubicaciones diferentes, o puntos en el espacio. La semivarianza $\gamma(h)$ es una función del intervalo h, o la distancia de separación, entre dos observaciones Z(x) y Z(x+h) del parámetro Z, y se tiene:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(x_1) - Z(x_2 + h)]^2 \quad (7)$$

Donde N(h) es el número de pares que están separados a la distancia h.

El estimador así definido lleva el nombre de variograma experimental. No se trata de una función propiamente tal, sino de una serie de valores, pues sólo se puede calcular para vectores h tales que N(h) no es vacío (Emery, 2013).

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1 Permeabilidad de núcleos

3.1.1 Efecto klinkenberg

Un aspecto importante a considerar es el efecto klinkenberg Figura 5, la cual representa un grupo de datos de núcleos del pozo SSF-151 donde la permeabilidad absoluta fue medida

utilizando aire, con su respectiva corrección en laboratorio por el efecto Klinkenberg.

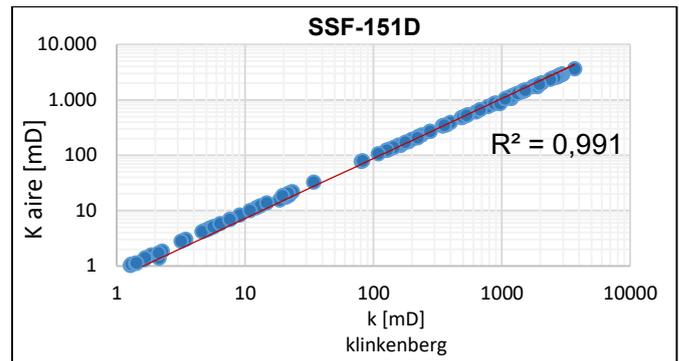


Figura 5. Permeabilidad al aire vs la permeabilidad corregida por efecto klinkenberg

Es importante notar que los valores de las permeabilidades medidas al aire son muy similares a las permeabilidades corregidas por el efecto Klinkenberg, especialmente a valores de permeabilidad mayores a los 100 [mD] donde se tiene un mejor ajuste a la línea de tendencia con un coeficiente de determinación (R^2) de 0.991.

3.1.2 Análisis de permeabilidades de núcleos

La Figura 6 corresponde a la relación permeabilidad-porosidad de 4 pozos del campo Shushufindi de la arenisca U. Esta relación permite identificar tres tipos de roca, donde cada tipo de roca muestra una relación debido a su comportamiento homogéneo. Esta relación porosidad-permeabilidad es fácil de evidenciar en unidades de roca que fueron depositadas bajo las mismas condiciones.

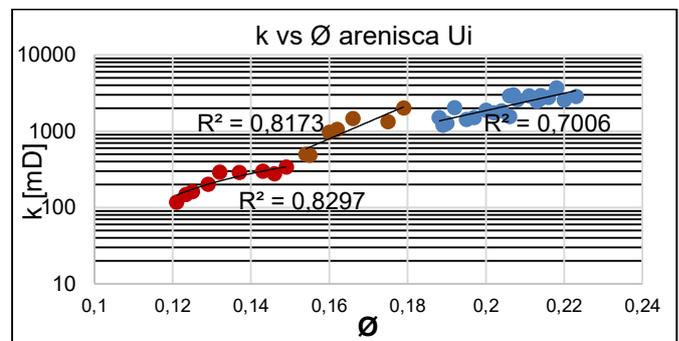


Figura 6. Relación permeabilidad porosidad para la arenisca Ui del campo Shushufindi

Los valores de permeabilidades registradas en cada tipo de roca incrementan directamente con la porosidad. Los coeficiente de determinación (R^2) muestran una fuerte relación entre las dos propiedades con valores entre 0.7-0.83

3.2 Permeabilidades de registros eléctricos

La Figura 7 corresponde al registro eléctrico del pozo SSF-151D donde en la última pista se tiene la permeabilidad calculada con la ecuación empírica de Coates y la permeabilidad de núcleos para la arenisca U inferior. Si bien el ajuste entre las permeabilidades de núcleos y registros evidencia una diferencia, esta es de esperarse debido a que el

volumen de investigación de los registros es típicamente 2 o 3 veces mayor que los núcleos.

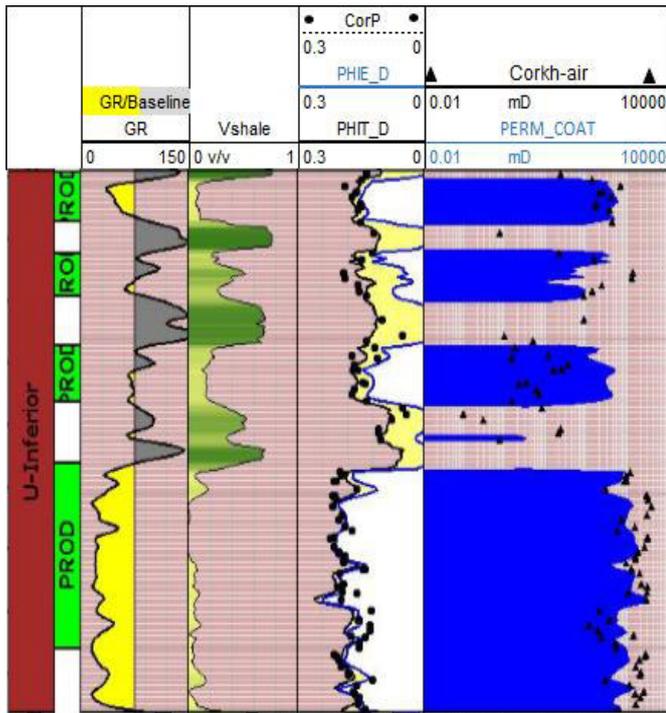


Figura 7. Permeabilidad de Coates y núcleos del pozo Shushufindi-151D de la arenisca U inferior

El reto en el cálculo de la permeabilidad a partir de registros eléctricos radica en la selección de la ecuación empírica apropiada, por lo que los datos de núcleos se vuelven imprescindibles en la calibración de esta fuente para la obtención de la permeabilidad.

3.3 Permeabilidades de pruebas de pozos

Las Figuras 8 y 9 muestran los histogramas con la distribución de permeabilidad obtenidos con pruebas de restauración de presión para las areniscas U y T inferior del campo Shushufindi.

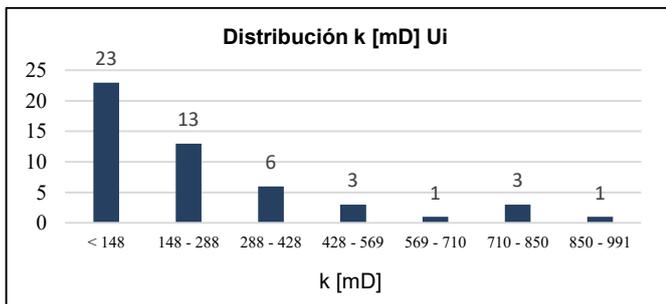


Figura 8. Distribución de permeabilidad efectiva para la arenisca U inferior

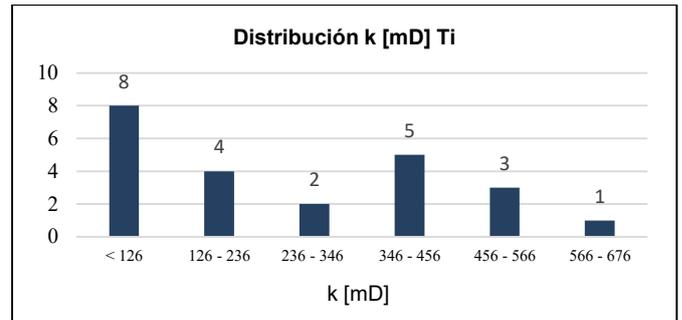


Figura 9. Distribución de permeabilidad efectiva para la arenisca T inferior

La distribución de valores de permeabilidad indica que los rangos más típicos de esta propiedad son menores a 148mD para la arenisca U con un 46%; mientras que el 52% de resultados de la arenisca T muestran permeabilidades menores a 236mD.

3.4 Permeabilidades de probadores de formación con cable

3.4.1 Distribución de permeabilidades de las arenas U y T

Las Figuras 10 y 11 muestran los histogramas con la distribución de permeabilidad obtenidos de las areniscas U y T inferior del campo Shushufindi.

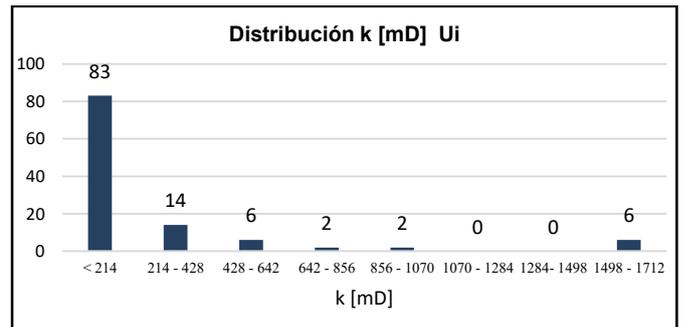


Figura 10. Distribución de permeabilidad efectiva para la arenisca U inferior

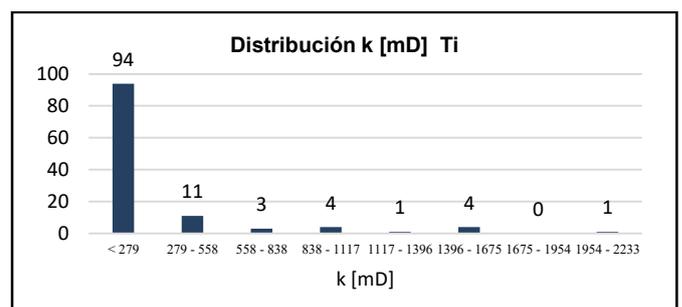


Figura 11. Distribución de permeabilidad efectiva para la arenisca T inferior

La distribución de permeabilidad de estos gráficos permite establecer valores de permeabilidad mayoritariamente distribuida en rangos menores a 214mD y 279mD para las areniscas U y T respectivamente.

3.4.2 Comparación permeabilidades de registros y probadores de formación con cable

La Figura 12 compara las permeabilidades obtenidas con los registros eléctricos y las obtenidas con probadores de formación con cable.

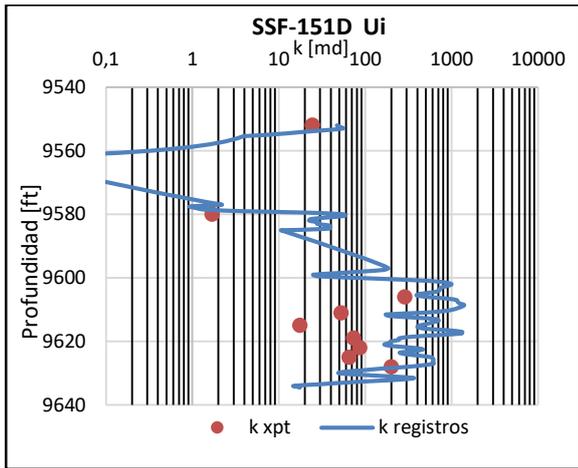


Figura 12. Comparación permeabilidades arenisca U inferior de registros y probadores de formación

La permeabilidad de registros eléctricos es mayor a la obtenida con los probadores de formación, esta diferencia de permeabilidades es común esperarse a pesar que estas dos fuentes se ven afectadas por efecto del filtrado de lodo; el volumen de investigación de estos dos métodos varía; otro factor que ocasiona estas diferencias consiste en el tipo de permeabilidad que determinan, donde la primera de ellas corresponde a una permeabilidad absoluta, mientras la otra es una permeabilidad efectiva.

3.5 Permeabilidades de análisis transiente de producción

La Figura 13 compara datos de permeabilidad obtenidos de pruebas de pozos (PTA) y análisis transiente de producción (RTA) para las areniscas U y T inferior del campo Shushufindi. La región amarilla corresponde al lugar donde las permeabilidades calculadas a partir de pruebas de pozos son mayores a las determinadas con análisis transiente de producción.

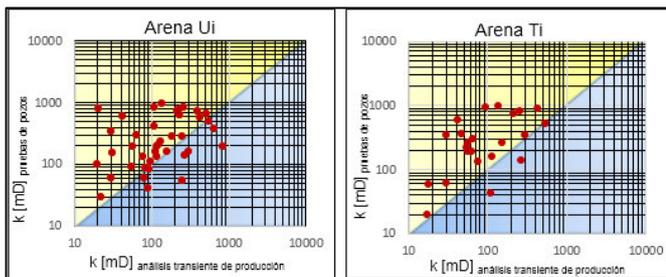


Figura 13. Comparación de permeabilidades de pruebas de pozos con análisis transiente de producción

El 76% y 87% de los datos de pruebas de pozos son mayores a los datos RTA, para las areniscas U y T inferior respectivamente. Esta diferencia de medidas es de esperarse debido a sus volúmenes de investigación, ya que el RTA tiene como volumen de análisis el área de drenaje del pozo, mientras que las pruebas de pozos dan como resultado un promedio entre el valor máximo y mínimo de permeabilidad medido.

3.6 Análisis de sensibilidad

3.6.1 Curvas de índice de productividad

La Figura 14 presenta las curvas de índice productividad (IPR) del pozoSSF-151, estos índices de productividad se calcularon con los valores de permeabilidades obtenidos con cada fuente estudiada, adicionalmente se observa datos de pruebas de producción (Q real).

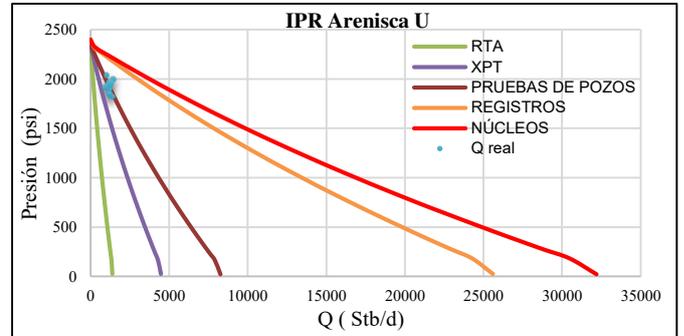


Figura 14. Curvas IPR de la arenisca U pozo SSF-151

Las diferencias en las curvas IPR de cada método son notables, siendo las curvas determinadas con núcleos y registros las de más alto IP, justificado por tratarse de permeabilidades absolutas. El mejor ajuste de las pruebas de producción se observa con la curva IPR generada a partir de la permeabilidad de pruebas de pozos.

La Tabla 3 muestra lo sensible que puede llegar a ser la estimación de la productividad de un pozo según la permeabilidad obtenida con cada método.

Tabla 3. Análisis de sensibilidad arenisca U del pozo SSF-151

Q prueba =1208 BFPD Pwf=1850 psi				
Método	K _a	K _c	K [mD]	Q [BFPD]
Núcleos	X		697	5040
Registros	X		554	3880
Pruebas de pozos		X	179	1250
Probadores de formación con cable		X	97	690
Análisis transiente de producción		X	30	205

3.7 Variograma

En la Figura 15 se observa el variograma de permeabilidades obtenidas de pruebas de presión para diferentes direcciones con su respectiva distancia máxima (h max) de tolerancia para la interpolación de la permeabilidad de la arenisca U del campo Shushufindi.

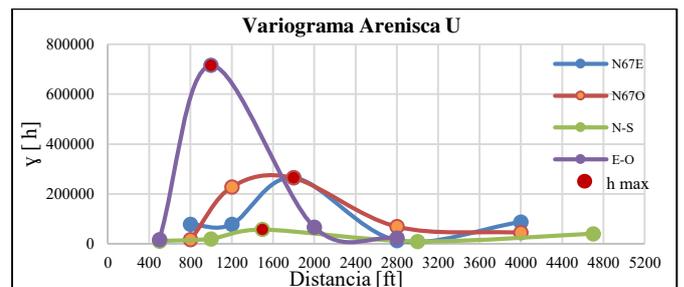


Figura 15. Variograma distribución espacial de la permeabilidad arenisca U del campo Shushufindi

La evaluación de la población de datos es una pieza fundamental en la caracterización del reservorio; estableciendo las direcciones y distancias máximas evaluadas para las cuales existe una buena correlación entre los datos de permeabilidad de los pozos de la arenisca U. Estableciéndose una distancia máxima de correlación de 1800 pies para las direcciones N67⁰E y N67⁰O; mientras para las direcciones N-S y E-O las distancias máximas son 1500 y 1000 pies respectivamente.

4. CONCLUSIONES

La corrección por efecto de Klinkenberg se vuelve necesaria en núcleos donde se determina bajas permeabilidades (menores a 100 mD); mientras para valores mayores a los 100 [mD] los valores de permeabilidad medidos al aire resultan confiables.

La permeabilidad medida de núcleos es virtualmente la medida más representativa del reservorio a pesar de tratarse de una parte muy pequeña del mismo; constituye una pieza fundamental en la evaluación de registros eléctricos como una fuente de calibración para la selección adecuada de una correlación predictora de la permeabilidad.

Los histogramas muestran una distribución de permeabilidad entre 133-214 mD para la arena U inferior, mientras que la arena T inferior esta distribución se halla entre 100-279 mD que corresponden a los rangos de permeabilidad más comunes a encontrar en el campo Shushufindi.

Los datos de permeabilidad obtenidos con los probadores de formación con cable son medidas puntuales y no brindan una medida continua como lo pueden hacer los registros eléctricos.

Se identificó la estrecha relación que existe en los análisis de presión y producción transitoria, ya que comparten fundamentos teóricos muy similares, pero al estimar la permeabilidad se puede apreciar grandes diferencias principalmente por sus diferentes volúmenes de investigación.

Para el Campo Shushufindi el método más apropiado para la estimación de la permeabilidad es a partir de las pruebas de restauración de presión tal como se puede apreciar en el empuje de los datos de producción reales con la curva IPR a partir de la permeabilidad generada con esta fuente.

La permeabilidad es un dato que se toma durante diferentes etapas de la vida productiva de un pozo, sin embargo tres métodos son aplicados previo a la vida productiva del pozo: núcleos, registros y los probadores de formación con cable que son tomados durante la etapa de perforación de un pozo, mientras que las pruebas de pozos y el análisis transiente de producción se realiza durante la vida productiva del pozo.

La distribución espacial de la permeabilidad es un aspecto fundamental en la identificación de heterogeneidades dentro del reservorio.

Todos los métodos en el cálculo de la permeabilidad son de gran importancia en diferentes etapas del gerenciamiento del campo con diferentes funciones ya sea como un dato de

calibración, un indicador de evaluación petrofísica o una fuente adecuada de estimación de la productividad de un pozo.

REFERENCIAS

- Al-Harbi, A., Gringarten, A., & Akkurt, R. (2007). A Practical Approach to Determine Permeability from Wireline Measurements. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/111221-MS.
- Baby, P., Rivadeneira, M., & Barragán, R. (2014). *La Cuenca Oriente: Geología y Petróleo*. Quito, Ecuador.
- Bazara, M., & Salman, S. (2009). Permeability Stimulation Using Log Data, Abu Dhabi Offshore Field, UAE. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/118741-MS.
- Cantini, S., Baldini, D., Beretta, E., Loi, D., & Mazzoni, S. (2013). Reservoir Permeability from Wireline Formation Testers. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/164924-MS.
- Castillo, A. O., y Ortega, H. A. (2016). *Propiedades Petrofísicas: Análisis, Interpretación y Aplicación en un Pozo Petrolero al Noreste de la República Mexicana*. (Tesis pregrado). Universidad Nacional Autónoma de México.
- Emery, X. (2013). *Geoestadística*. Chile: Universidad de Chile
- Fanchi, J. (2018). *Principles of Applied Reservoir Simulation*. Cambridge: Elsevier.
- López, F., Biedma, D., & Suter, A. (2015). Optimizing the Reservoir Management of a Mature Oil Field: The Challenge of Shushufindi. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/177197-MS.
- Mohaghegh, S., Balan, B., & Armeri, S. (1997). Permeability Determination From Well Log Data. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/30978-PA.
- Nind, T. (2010). *Fundamentos de Producción y Mantenimiento de Pozos Petroleros*. Limusa.
- Pérez, W. (2012). *Evaluación del Cálculo de la Movilidad Obtenida de Probadores de Formación con Wireline Usando Información de Registros Convencionales*. (Tesis pregrado) Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.
- Schlumberger. (2002). *Mejoramiento de Nuestra Comprensión acerca de la permeabilidad*. Oilfield Review.
- Schlumberger. (1996). *Wireline Formation Testing and Sampling*. Schlumberger Wireline & Testing.
- Schlumberger. (2019). *Oilfield Glossary*. Obtenido de <https://www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/d/darcy.aspx>
- Shokir, E., Alsughayer, A., & Al-Ateeq, A. (2006). Permeability Estimation From Well Log Responses. *Petroleum Society of Canada*. doi:10.2118/06-11-05
- Sullivan, T., Beliveau, D., Kumar, P., & Tandon, R. (2008). Mangala Field Permeability Measurements: Comparison of Core,

Wireline, and Well Test Data. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/113164-MS

Sun, H. (2015). *Advanced Production Decline Analysis and Application*. ELSEVIER.

Talabani, S., Thamir, F., & Islam, M. (1999). Rock Permeability Measurements Using Drilling Cutting. *Petroleum Society of Canada*. doi:10.2118/99-127.

Torbello Ramírez, O. P. (2012). *Predicción de Permeabilidad en Yacimientos Altamente Heterogéneos Aplicando Métodos no Convencionales*. Quito: Universidad Simón Bolívar.

BIOGRAFÍAS



Domingo-Ecuador.

Guamialamá Carlos. Ingeniero de Petróleos de la Facultad de Ingeniería en Geología y Petróleos de la Escuela Politécnica Nacional Quito-Ecuador. Nació en Santo Domingo-Ecuador el 6 de abril de 1994, se graduó de Bachiller en Ciencias Generales en el Instituto Técnico de Comercio Amazonas Santo



Jose Luis Freire: Ingeniero de Petróleos Escuela Politécnica Nacional (2009). Posee un MSc. Ingeniería en Petróleos mención Optimización de Producción por la Universidad Heriot-Watt UK Scotland graduado con distinción al mérito académico (2014), 10 años en la industria Nacional en PetroAmazonas E.P. como Ingeniero Senior de Operaciones y Completación, e Internacional en Colombia, Argentina, UK, en Schlumberger Production Management como Ingeniero Senior de Reservorios y Producción.

Raúl Valencia. Ingeniero en Petróleos y Magister en Ingeniería Industrial por la Escuela Politécnica Nacional. Profesor Titular a Tiempo completo en la Carrera de Ingeniería en Petróleos desde 1998. Actualmente es jefe del Departamento de Petróleo. Sus intereses de investigación se centran al Área de Petróleos



específicamente en la Línea de Yacimientos de Hidrocarburos y Recuperación Mejorada.

Equivalencia del Axioma de Elección con el Problema de Redefinición de Funciones

Merino, Andrés ^{1,*}  ; Trujillo, Juan C. ² 

¹ *Escuela de Ciencias Físicas y Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Pontificia Universidad Católica del Ecuador. Quito, Ecuador*

email: aemerinot@puce.edu.ec

² *Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias. Escuela Politécnica Nacional. Quito, Ecuador*

email: juancarlos.trujillo@epn.edu.ec

Resumen: En el presente trabajo se estudia el problema de redefinir el dominio de una función real dada para que esta sea inyectiva, desde el caso más general, hasta llegar a las restricciones necesarias para que este Problema sea equivalente al Axioma de Elección.

Palabras claves: Axioma de Elección, funciones inyectivas, redefinición de funciones.

Equivalence of the Axiom of Choice with the Problem of the Redefinition of Functions

Abstract: In this paper we will study the problem of redefining the domain of a given real function in order to obtain an injective function, from the most general case, to the necessary restrictions to make this problem equivalent to the Axiom of Choice.

Keywords: Axiom of Choice, injective functions, redefinition of functions.

1. INTRODUCCIÓN

En las notas de clase de un curso de Pre-cálculo no publicadas formalmente por alguna editorial o revista científica, pero de amplio uso en cursos de nivelación para el ingreso a las carreras de ingeniería en Ecuador, los autores de este artículo encontramos un ejercicio planteado incorrectamente; la incorrección se debía fundamentalmente a las falencias de la enseñanza del concepto de función presentes en dichas notas de clase.

Con el fin de entender el problema de la formulación incorrecta, buscamos en la bibliografía especializada de educación matemática, investigaciones sobre los errores comunes en la enseñanza del concepto de función; no obstante, no hallamos ninguna significativa. Por otro lado, dimos con numerosos artículos sobre las dificultades en la enseñanza-aprendizaje del concepto de función (como muestra, véase Oehrtman, M., Carlson, M. y Thompson, P. (2008)) y sobre las consecuencias de definir de maneras distintas conceptos relacionados a las funciones; por ejemplo, la continuidad (véase Jayakody, G. y Zazkis, R. (2015)). Nuestra hipótesis de la falta de investigaciones sobre el problema encontrado en las mencionadas notas es que, en general, este no es común en la enseñanza de las funciones a nivel mundial, parece ser un problema local.

La búsqueda del origen del problema mal planteado nos llevó a formularnos, más bien, una pregunta sobre teoría de funciones. La respuesta llegó en el marco de la *Teoría de Conjuntos* y del *Axioma de Elección*, y ese es el tema que tratamos en este artículo.

El ejemplo de las notas de clase mencionadas causante de este artículo es el siguiente:

Redefinir la siguiente función para que sea inyectiva:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1, \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

En el planteamiento de este problema, encontramos una imprecisión importante: ¿qué significa “redefinir” una función? En ninguna parte de las notas de clase, se encuentra una definición formal ni una explicación intuitiva de “redefinir una función”. Ahora bien, en general, en la teoría de funciones, dada una función, la restricción o extensión de esta podría ser entendida como una forma de “redefinición” de la misma. Tanto en el proceso de restringir como de extender una función, el resultado obtenido es una nueva función, diferente de la original aunque “muy parecida a ella”, en el sentido de que ambas funciones “comparten” sus imágenes en la intersección de sus dominios; además, el objetivo de la restricción

*aemerinot@puce.edu.ec

Recibido: 07/06/2019

Aceptado: 07/05/2020

Publicado: 31/05/2020

10.33333/tp.vol45n2.05

CC BY 4.0

o la extensión suele ser el de preservar una o varias propiedades de interés de la función original; por ejemplo, la condición de ser: inyectiva, biyectiva, lineal, continua, continua uniformemente, derivable, integrable o medible, etcétera.

Si nos limitamos, entonces, a entender la “redefinición de una función” como una extensión o una restricción de la misma, solicitar que se “redefina” la función f descrita en el texto universitario, significaría solicitar que busquemos, o bien una extensión o bien una restricción de f que sea inyectiva. Es claro que si f no es inyectiva, una extensión tampoco lo sería. Luego, la solución buscada debería ser una restricción de f que sea inyectiva.

Ahora bien, asumida la “redefinición de una función” como una restricción de la función original, en el problema encontrado en texto mencionado, nos encontramos con otra dificultad: la función f no está definida de manera correcta, pues no se indica los conjuntos de llegada y salida. En efecto, al no hacerlo, no se está describiendo una función f , sino la ley de asignación de una clase infinita de funciones del tipo

$$\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 1, \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

donde A es un subconjunto distinto del vacío de \mathbb{R} . Por ejemplo, las funciones cuyas gráficas se muestran en la Figura 1 son tres elementos de esta clase. En este caso, A es \mathbb{R} para f_0 , $(-\infty, 1)$ para f_1 , $[2, +\infty)$ para f_2 y $(1, +\infty)$ para f_3 . Por tanto, en principio, el problema está mal formulado.

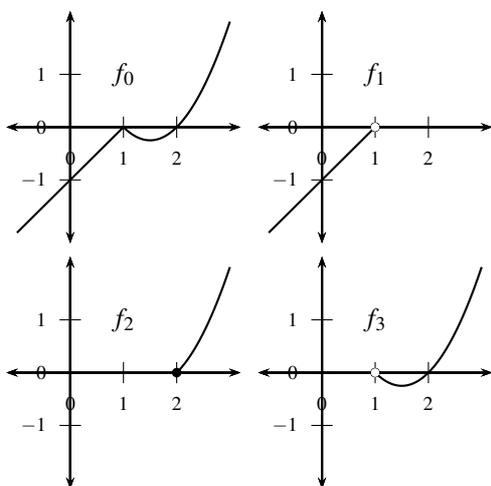


Figura 1. Gráfica de los ejemplos de soluciones al problema.

No obstante, para dar una respuesta a la pregunta del texto, deberíamos elegir un conjunto A particular de modo que la función resultante, a la que llamaremos f , no sea inyectiva. Hecho esto, la respuesta al problema es obvia y simple: si tomamos $B = \{x_0\}$, donde $x_0 \in A$, entonces la restricción de f a B es una función inyectiva, lo que hace que este problema no sea interesante en principio.

Sin embargo, podemos modificar el pedido original para pasar de un problema trivial a uno que implique un instrumento de aprendizaje para los estudiantes. En efecto, una modificación posible es la

siguiente: *determinar todas las restricciones de f que sean inyectivas*. Otra posibilidad es: *encontrar una restricción de f de modo que la función original y la restricción tengan la misma imagen*.

En este artículo, vamos a ofrecer un análisis de la solución de la segunda posibilidad. Como veremos, una formulación más amplia de la cuestión nos mostrará que esta segunda posibilidad es equivalente al Axioma de Elección, lo que, a su vez, nos indicará que es imposible dar con una solución explícita al nuevo problema. Antes de empezar, presentamos algunas de las definiciones sobre funciones aceptadas por la comunidad matemática actual (Pinter, C., 1971; Mendelson, E., 1997) que serán necesarias para la tarea planteada.

Definición 1 (Función de un conjunto en otro). *Si A y B son dos conjuntos no vacíos, f es **función de A en B** si y solo si*

1. f es un subconjunto del producto cartesiano de A y B ; es decir, si

$$f \subseteq A \times B.$$

2. Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$.
3. Si $(x,y) \in f$ y $(x,z) \in f$, entonces $y = z$.

Para indicar que “ f es una función de A de B ”, escribiremos

$$f: A \rightarrow B.$$

Al conjunto A se le conoce como el **conjunto de salida** de f o, simplemente, el **dominio** de f , y al conjunto B como el conjunto de llegada de la función.

Si $x \in A$ (es decir, si x está en el dominio de f), el único elemento y de B tal que $(x,y) \in f$ es representado por $f(x)$ y denominado **la imagen de x respecto de f** . El signo $f(x)$ se lee “efe de x ”.

Esta definición precisa (formal) de **función de un conjunto en otro** puede parafrasearse de la siguiente manera, como se lo hace en muchos textos que, si bien utilizan mecanismos menos formales con fines didácticos, no incurrir en imprecisiones matemáticas (por ejemplo, el texto de Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012)):

Si A y B son conjuntos no vacíos, f es una función de A en B si y solo si f es una relación de A en B ($f \subseteq A \times B$) tal que para todo elemento x de A , existe un elemento $y \in B$ que le “corresponde” a x ($(x,y) \in f$) y solo uno (si $(x,y) \in f$ y $(x,z) \in f$, entonces $y = z$).

Definición 2 (Imagen o recorrido). *Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f: A \rightarrow B$. Se define la **imagen o recorrido** de la función f de A en B al conjunto*

$$\text{img}(f) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Definición 3 (Restricción). *Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f: A \rightarrow B$. Dado $C \subseteq A$, un conjunto no vacío, la **restricción de f a C** , denotada por $f|_C$, es la función*

$$f|_C: C \rightarrow B$$

$$x \mapsto f|_C(x) = f(x).$$

Definición 4 (Función inyectiva). Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f: A \rightarrow B$. La función f es **inyectiva** si y solo si para todo $x \in A$ y todo $y \in A$ tales que $x \neq y$, se tiene que $f(x) \neq f(y)$; es decir, si $f(x) = f(y)$, necesariamente $x = y$.

Definición 5 (Función sobreyectiva). Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f: A \rightarrow B$. La función f de A en B es **sobreyectiva** si y solo si para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Definición 6 (Función biyectiva). Una función es **biyectiva** si y solo si es inyectiva y sobreyectiva.

2. FORMALIZACIÓN DEL PROBLEMA

En esta sección vamos a formalizar los problemas presentados en la introducción. En primer lugar, no hablaremos de “redefinir una función f para que sea inyectiva”, sino que “buscaremos un subconjunto B del dominio de f de manera que la restricción de f a B sea inyectiva”. En otras palabras, el problema es el siguiente:

Problema 1. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, diferente del vacío, y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Se busca $B \subseteq A$, distinto del vacío, tal que la función $f|_B$ sea inyectiva.

Como ya se dijo, este problema puede tener infinitas soluciones. En primer lugar, si f fuera inyectiva, entonces $\mathcal{P}(A)$ sería el conjunto de todas las soluciones.

Por otra parte, se observa que si B es una solución, cualquier subconjunto de B también lo es. Así, en general, la solución puede no ser única.

Como se vio en la introducción, una solución se obtiene inmediatamente si $B = \{x_0\}$, donde $x_0 \in A$, pues $f|_B$ es inyectiva. Esta nos ofrece información importante sobre el problema: existen al menos tantas soluciones como elementos tenga el conjunto A .

En la siguiente sección, se darán condiciones para que la solución sea única, se analizarán algunos tipos de soluciones y, con la ayuda del Axioma de Elección, ofreceremos una variedad de soluciones.

Por otro lado, cualquier solución da lugar a una restricción de la función original cuyo recorrido es, en general, diferente del recorrido de la función original. En este sentido, la función obtenida puede ser “bastante diferente” de la función dada inicialmente. Con el fin de obtener una solución que dé lugar a una función lo más “parecida” a la original, el siguiente problema es el resultado de incluir la condición de que la función conserve el recorrido de la función original:

Problema 2. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, diferente del vacío, y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Se busca $B \subseteq A$, distinto del vacío, tal que la función $f|_B$ sea inyectiva y $\text{img}(f|_B) = \text{img}(f)$.

En la última sección de este artículo, se demostrará que este enunciado es equivalente al Axioma de Elección (véase la página 55), cuando la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ es de conjuntos disjuntos de números reales.

A continuación, presentamos las definiciones necesarias para el estudio de los dos problemas (ver Pinter, C. (1971) y Mendelson, E. (1997)).

Definición 7 (Conjunto transitivo). Un conjunto A es **transitivo** si y solo si $x \in A$ implica $x \subseteq A$; es decir, todo elemento de A es también un subconjunto de A .

Definición 8 (Conjunto bien ordenado). Si (A, \leq) es un conjunto con un orden parcial, se dice que está **bien ordenado** si y solo si todo subconjunto de A distinto del vacío tiene elemento mínimo; es decir, si existe $m \in A$ tal que para todo $x \in A$, se tiene que $m \leq x$.

Definición 9 (Número ordinal). Un conjunto α es un **número ordinal** si y solo si α es un conjunto transitivo y (α, \leq_\in) está bien ordenado, donde $x \leq_\in y$ si y solo si

$$x \in y \quad \vee \quad x = y,$$

para todo x y todo y elementos de α .

Definición 10 (Igual, menor o igual y menor cardinalidad). Dos conjuntos A y B **tienen igual cardinalidad** si y solo si existe una función biyectiva $f: A \rightarrow B$; en ese caso, se escribirá $|A| = |B|$. Si existe una función inyectiva $g: A \rightarrow B$ se dirá que la cardinalidad de A es **menor o igual** que la de B y se escribirá $|A| \leq |B|$. Finalmente, se dirá que la cardinalidad de A es **menor** que la de B y se notará $|A| < |B|$, si $|A| \leq |B|$ pero $|A| \neq |B|$.

Definición 11 (Número cardinal). Si α es un número ordinal, se dirá que es un **número cardinal** si y solo si para todo $\beta \in \alpha$, se tiene que $|\beta| < |\alpha|$. Además, dado un conjunto A y un número cardinal α , si $|A| = |\alpha|$, se denotará simplemente $|A| = \alpha$ y se dirá que la cardinalidad de A es α .

Utilizaremos las siguientes notaciones: si E es un conjunto y α un número cardinal, notaremos con $E^{(\alpha)}$ el conjunto de todos los subconjuntos de E cuya cardinalidad es α :

$$E^{(\alpha)} = \{B \subseteq E : |B| = \alpha\}.$$

Con \aleph_0 indicaremos la cardinalidad del conjunto de los números naturales \mathbb{N} y con c la del conjunto de los números reales \mathbb{R} .

Finalmente, el siguiente enunciado es la versión del Axioma de Elección que utilizaremos en este artículo:

Axioma 1 (Axioma de Elección). Sean A un conjunto y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos no vacíos de A , donde I también es un conjunto. Se tiene que existe una función $g: I \rightarrow A$ tal que

$$g(i) \in A_i$$

para todo $i \in I$.

3. ANÁLISIS DEL PROBLEMA 1

En esta sección, analizamos las soluciones del Problema 1. En primer lugar, como se mencionó anteriormente, los elementos del conjunto

$$A^{(1)} = \{\{a\} \subseteq A : a \in A\}$$

son soluciones triviales del problema. Por tanto, existen al menos tantas soluciones como elementos tenga A . Luego, si A tiene más

de un elemento, la solución del Problema 1 no es única. Recíprocamente, si A es un conjunto unitario, tenemos que

$$A^{(1)} = \{A\},$$

con lo cual obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 1. *El Problema 1 tiene una única solución si y solo si la cardinalidad de A es 1.*

Si A tiene más de un elemento, tenemos más de una solución: todos los elementos de $A^{(1)}$. No obstante, todas estas soluciones pueden ser vistas como una sola solución: la clase de todas las soluciones que tienen cardinalidad 1. En particular, si f es constante, este tipo de solución es la única que existe para el Problema 1.

Proposición 2. *El conjunto de soluciones del Problema 1 es $A^{(1)}$ si y solo si f es una función constante.*

Demostración. Supongamos que $A^{(1)}$ es el conjunto de soluciones del Problema 1 y que f no es una función constante; por tanto, existen $a, b \in A$ tales que $a \neq b$ y $f(a) \neq f(b)$. Así, tomando $B = \{a, b\}$, tenemos que $f|_B$ es inyectiva; luego, B es una solución del Problema 1 que no pertenece a $A^{(1)}$, lo cual es contradictorio.

Recíprocamente, supongamos que f es una función constante y que existe $B \subseteq A$ tal que $B \notin A^{(1)}$ y $f|_B$ es inyectiva. Entonces B tiene más de un elemento. Sean $a, b \in B$ tales que $a \neq b$; dado que $f|_B$ es inyectiva, tenemos que $f(a) \neq f(b)$, de donde f no es constante, lo cual es imposible. \square

De esta proposición se deduce fácilmente que el conjunto de soluciones del Problema 1 es $A^{(1)}$ si y solo si $|\text{img}(f)| = 1$. No obstante, las soluciones generan funciones que son clases unitarias (tienen únicamente un par ordenado como elemento) que, en general, no son de mayor interés.

Por ello, en lugar de buscar condiciones sobre la imagen de la función f para la existencia de una solución del problema 1, indagamos la posibilidad de que existan soluciones que tenga más de un elemento; por ejemplo, saber si existe una solución (y si es única) que tenga una cardinalidad dada. Así, consideremos el siguiente problema.

Problema 3. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, diferente del vacío, α un cardinal y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Se busca $B \subseteq A$, distinto del vacío, tal que $f|_B$ sea inyectiva y $|B| = \alpha$.*

Las siguientes proposiciones dan las condiciones de existencia y unidad para la solución de este problema.

Proposición 3. *Para todo cardinal α tal que $\alpha \leq |\text{img}(f)|$, existe una solución del Problema 3.*

Demostración. Sea α un cardinal tal que $\alpha \leq |\text{img}(f)|$, tenemos que existe $C \subseteq \text{img}(f)$ tal que $|C| = \alpha$. Tomemos la familia

$$\{f^{-1}(\{y\})\}_{y \in C},$$

la cual está formada por subconjuntos no vacíos de A , pues $C \subseteq \text{img}(f)$. Por el Axioma de Elección, existe una función $g: C \rightarrow A$

tal que $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$ para todo $y \in C$. Ahora, definamos $B = \text{img}(g) \subseteq A$. Luego, $f|_B$ es inyectiva, pues si $a, b \in B$ son tales que $f(a) = f(b)$, tenemos que existen $u, v \in C$ tales que

$$a = g(u) \quad y \quad b = g(v),$$

de donde, $a \in f^{-1}(\{u\})$ y $b \in f^{-1}(\{v\})$; es decir,

$$f(a) = u \quad y \quad f(b) = v,$$

luego, $u = v$ y, por tanto, $a = g(u) = g(v) = b$. Así, B es una solución al Problema 1.

Por otro lado, tenemos que $\text{img}(f|_B) = C$. En efecto, si $u \in C$, tenemos que $g(u) \in B$, de donde $f(g(u)) \in \text{img}(f|_B)$, pero, como $g(u) \in f^{-1}(\{u\})$, $f(g(u)) = u$; así, $u \in \text{img}(f|_B)$. Recíprocamente, si $u \in \text{img}(f|_B)$, existe $v \in B$ tal que $f(v) = u$ y, como $v \in B = \text{img}(g)$, existe $w \in C$ tal que $g(w) = v$; por tanto, $f(g(w)) = u$; pero, $g(w) \in f^{-1}(\{w\})$, de donde $f(g(w)) = w$; así, $u = w$ y, con ello, concluimos que $u \in C$.

En resumen, $f|_B$ es inyectiva y, por tanto, $|B| = |\text{img}(f|_B)| = |C| = \alpha$; así, B es una solución del Problema 3. \square

La Proposición 3 asegura la existencia de una solución al Problema 3 siempre y cuando $\alpha \leq |\text{img}(f)|$. Por otra parte, si $\alpha > |\text{img}(f)|$, se ve inmediatamente que el Problema 3 no tiene solución. Si α es finito, en la demostración de la Proposición 3, no es necesario el uso del Axioma de Elección y se puede obtener una solución explícita. En el caso de que α sea infinito, en general, el Problema 3 podría no tener una solución explícita (este sería el caso si el Axioma de Elección fuera esencial en la demostración de la existencia de una solución).

A continuación, presentamos algunas características para que el Problema 3 tenga solución única.

Proposición 4. *Sea $\alpha \leq |\text{img}(f)|$ un cardinal finito. Si el Problema 3 tiene solución única, esa solución es A y, por tanto, la función f es inyectiva.*

Demostración. Supongamos que el Problema 3 tiene solución única y sea B su solución; es decir, $f|_B$ es inyectiva. Supongamos también que existe $u \in A$ tal que $u \notin B$; se tendrían dos posibilidades para $f(u)$:

1. Si $f(u) \in f(B)$, existe $v \in B$ tal que $f(v) = f(u)$; luego, tomando $C = (B \setminus \{v\}) \cup \{u\}$, tenemos que $|B| = |C|$ y que $f|_C$ es inyectiva; por tanto, C sería una solución del problema, lo cual es imposible pues $C \neq B$.
2. Si $f(u) \notin f(B)$, tomemos cualquier elemento v en B y C igual que en el caso anterior; entonces $|B| = |C|$ y $f|_C$ es inyectiva. Así C sería solución del problema, lo cual es imposible pues $C \neq B$.

Luego, $B = A$; es decir, A es una solución del problema y, por tanto, f es inyectiva, pues $f|_A = f$. \square

Es inmediato ver que, si $\alpha = |A|$ es finito, la única posibilidad para que Problema 3 tenga solución es que f sea inyectiva, y su única

solución sería A . A continuación veamos lo que sucede cuando α es infinito.

Proposición 5. *El Problema 3 tiene infinitas soluciones si $\alpha \leq |\text{img}(f)|$ y α es un cardinal infinito.*

Demostración. Por la proposición 3, el Problema 3 tiene al menos una solución; sea $B \subseteq A$ una de ellas. Dado que $|B| = \alpha$ es infinito, para cualquier $u \in B$, el conjunto $C_u = B \setminus \{u\}$ tiene cardinalidad α , es diferente de B y también es una solución del problema. Así, cada elemento de la familia infinita

$$\{C_u\}_{u \in B}$$

es una solución del Problema 3. □

4. ANÁLISIS DEL PROBLEMA 2

En esta sección, analizamos las soluciones del Problema 2. La siguiente proposición indica el caso en el cual el problema tiene solución única.

Proposición 6. *El Problema 2 tiene solución única si y solo si f es inyectiva; en este caso, la solución es el conjunto A .*

Demostración. Supongamos que B es la única solución del Problema 2 y que existe $u \in A$ tal que $u \notin B$; dado que $f(u) \in \text{img}(f) = \text{img}(f|_B)$, existe $v \in B$ tal que $f(u) = f(v)$. Tomemos $C = (B \setminus \{v\}) \cup \{u\}$, tenemos que C es una solución del problema, lo cual es imposible pues $B \neq C$; por tanto, $B = A$, de donde $f = f|_A$ es inyectiva.

Recíprocamente, si f es inyectiva, A es una solución. Supongamos que B también es una solución y que existe $u \in A$ tal que $u \notin B$. Dado que f es inyectiva, tenemos que $f(u) \notin \text{img}(f|_B)$, por lo tanto $\text{img}(f|_B) \neq \text{img}(f)$, lo cual es imposible; por tanto $B = A$; así A es la única solución del Problema 2. □

Para analizar la existencia de una solución del Problema 2, requerimos la siguiente proposición, que es una consecuencia del Axioma de Elección.

Axioma 2 (Axioma de Elección en \mathbb{R}). *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} , disjuntos dos a dos, donde $I \subseteq \mathbb{R}$. Existe una función $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(i) \in A_i$ para todo $i \in I$.*

Esta proposición no es equivalente al Axioma de Elección, pero probaremos que es equivalente al Problema 2.

Proposición 7. *El Problema 2 siempre tiene solución.*

Demostración. Tomemos la familia

$$\{f^{-1}(\{y\})\}_{y \in \text{img}(f)},$$

la cual está formada por subconjuntos no vacíos de A . Por el Axioma de Elección en \mathbb{R} , existe una función $g: \text{img}(f) \rightarrow A$ tal que $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$ para todo $y \in \text{img}(f)$.

El conjunto $B = \text{img}(g) \subseteq A$ es solución. En efecto, $f|_B$ es inyectiva, ya que si $a, b \in B$ tales que $f(a) = f(b)$; entonces existen $u, v \in C$ tales que

$$a = g(u) \quad \text{y} \quad b = g(v),$$

por lo tanto, $a \in f^{-1}(\{u\})$ y $b \in f^{-1}(\{v\})$; es decir,

$$f(a) = u \quad \text{y} \quad f(b) = v,$$

de donde, $u = v$ y, por tanto, $a = g(u) = g(v) = b$.

También tenemos que $\text{img}(f|_B) = \text{img}(f)$, pues es inmediato que $\text{img}(f|_B) \subseteq \text{img}(f)$, y si $u \in \text{img}(f)$, $g(u) \in B$; por tanto, $f(g(u)) \in \text{img}(f|_B)$. Finalmente, como $g(u) \in f^{-1}(\{u\})$, tenemos que $f(g(u)) = u$ y, por tanto, $u \in \text{img}(f|_B)$. Con esto, se tiene que B es una solución del problema. □

Proposición 8. *La existencia de solución para el Problema 2 implica el Axioma de Elección en \mathbb{R} .*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} , disjuntos dos a dos, donde $I \subseteq \mathbb{R}$. Se define la función

$$f: \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow I$$

tal que $f(x) = i$ si y solo si $x \in A_i$. Dado que los conjuntos son disjuntos, la función se encuentra bien definida; además, dado que la familia es de conjuntos no vacíos, se tiene que $\text{img}(f) = I$. Sea B la solución del Problema 2 para esta función. Tenemos que $\text{img}(f|_B) = I$ y, por tanto,

$$f|_B: B \rightarrow I$$

es sobreyectiva; luego, si $g = f|_B^{-1}$, obtenemos que

$$g: I \rightarrow B,$$

es una función tal que $g(i) \in A_i$ para todo $i \in I$. □

5. CONCLUSIONES

La falta de precisión con que se definen y utilizan los conceptos matemáticos en los cursos de Cálculo en los primeros años de universidad, da lugar al planteamiento de problemas falsos (como el mostrado en este artículo) que, una vez formulados adecuadamente, o bien se convierten en problemas triviales, o bien tienen soluciones que no podrán ser abordadas en este nivel de estudios por los estudiantes.

El problema obtenido (a partir del problema falso) que hemos analizado en este artículo nos muestra la necesidad de que los cursos de formación básica en Matemáticas para las ingenierías deberían manejar de manera consistente los conceptos básicos como los de conjunto, función y número real, entre otros, aunque no los presenten necesariamente con toda la formalidad.

REFERENCIAS

- Cohen, P. (1963). The Independence of the Continuum Hypothesis. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 50(6). 1143–1148. <https://doi.org/10.1073/pnas.50.6.1143>
- Herrlich, H. (2006). *Axiom of Choice*. Países Bajos: Springer-Verlag.
- Jayakody, G. y Zazkis, R. (2015). *Continuous problem of function continuity*. For the Learning of Mathematics 35(1), 8-14.
- Jech, T. (1973). *The Axiom of Choice*. Estados Unidos de América: Dover Publications.
- Mendelson, C. (1997). *Introduction to Mathematical Logic*. Estados Unidos de América: Springer-Verlag.
- Oehrtman, M., Carlson, M. y Thompson, P. (2008). *Foundational Reasoning Abilities that Promote Coherence in Students' Function Understanding*. En M. Carlson, y C. Reasmussen (Eds.), *Making the Connection Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 27-41). Estados Unidos de América: The Mathematical Association of America.
- Pinter, C. (1971). *Set Theory*. Estados Unidos de América: Addison-Wesley.
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning.

BIOGRAFÍAS



Andrés Esteban Merino Toapanta. Profesor titular a tiempo completo de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador, graduado de Matemático en la Escuela Politécnica Nacional y de Magíster en Matemáticas Puras y Aplicadas en la Universidad Central del Ecuador. Sus campos de investigación son la Teoría Descriptiva de Conjunto, Fundamentos de la Matemática y Educación Matemática. <https://orcid.org/0000-0002-5404-918X>



Juan Carlos Trujillo Ortega. Profesor principal a tiempo completo del departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Escuela Politécnica Nacional (EPN). Graduado en Matemáticas puras en la EPN (1990) y de Magíster en Informática por la EPN-UASB (1998). Desde 2012, es coordinador del programa CLAVEMAT de la EPN. Sus campos de investigación son los Fundamentos de la Matemática y la Educación Matemática.

<https://orcid.org/0000-0002-9017-3137>

Diseño e Implementación de un Sistema Bifrecuencial Basado en Láseres de Baja Potencia

Matango, Santiago¹ ; Ávalos, Eduardo^{1,*} 

¹Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Quito, Ecuador

Resumen: El presente trabajo describe el diseño e implementación de un sistema bifrecuencial que puede ser usado como alternativa para el tratamiento de enfermedades en la boca mediante la irradiación de luz láser de baja potencia. El sistema es un prototipo, cuyo diseño mecánico es creado en un software de uso libre para luego ser impreso en un modelo 3D el cual alberga toda la parte electrónica y óptica. En cuanto a la parte electrónica, se monta sobre varios módulos los cuales cumplen diferentes funciones como son: el cargador de la batería, convertidores de potencia, drivers para los disparadores, una pantalla OLED que muestra información de los sensores, todo el proceso y mandos tanto manuales como automáticos son controlados por una tarjeta de desarrollo. El sistema óptico comprende de; un arreglo de espejos que básicamente dan el direccionamiento a la luz de los láseres y hacen que incidan sobre un mismo punto, al final se integra una fibra óptica para poder ingresar a partes inaccesibles en la boca para el tratamiento. Para validar el prototipo implementado, se realizaron mediciones tanto de la irradiancia como de la potencia en equipos especializados para estas aplicaciones, a más de basarse en revistas odontológicas y artículos de salud publicados por distintos institutos y universidades.

Palabras clave: Láser, bifrecuencial, espejos, tarjeta de desarrollo, irradiancia.

Design and Implementation of a Bifrequencial System Based on Low Power Lasers

Abstract: This paper describes the design and implementation of a bifrequencial system that can be used as an alternative for the treatment of diseases in the mouth by irradiating low power laser light. The system is a prototype, whose mechanical design is created in a free-use software and then printed on a 3D model which houses all the electronic and optical part, as for the electronic part it is mounted on several modules which meet different functions such as the battery charger, power converters, drivers for the triggers, an OLED screen that displays sensor information, the entire process and both manual and automatic controls are controlled by a development card. The optical system comprises an arrangement of mirrors that basically, gives the light direction of the lasers and make them impact on the same point, in the end an optical fiber is integrated to be able to enter inaccessible parts in the mouth for treatment. To validate the implemented prototype, measurements were made of both irradiance and power in specialized equipment for these applications, in addition to being based on dental journals and health articles published by different institutes and universities.

Keywords: Laser, bifrequencial, mirrors, development card, irradiance.

1. INTRODUCCIÓN

Las enfermedades de la boca son lesiones que se presentan como úlceras causando inflamación del tejido blando, las cuales pueden originarse por agentes mecánicos, químicos, biológicos y endógenos del organismo, estas se manifiestan de manera aguda, crónica o recurrente. Una de las lesiones de este tipo, cuyo comportamiento es reincidente son las aftas bucales. El afta es una lesión que se considera multifactorial, aunque en la actualidad sus causas no están del todo definidas, se caracterizan por la aparición de úlceras dolorosas las cuales son variables en forma y tamaño. Otra enfermedad que es muy

común en la población es el herpes simple tipo 1, el cual se presenta como úlceras bucales o ampollas febriles causando llagas alrededor de la boca o en el rostro, no existe ningún tratamiento que elimine por completo el virus que la causa, solo existen tratamientos que hacen que el virus se inactive pero ante cualquier cambio ambiental o corporal el virus volverá a aparecer (España, y otros, 2004). Es así como las llagas que se pueden desarrollar en la boca o a su alrededor se han convertido en un problema muy doloroso y molesto para las personas, lesiones que pueden durar varios días en desaparecer dejando en algunos casos marcas de alguna cicatriz a la persona que lo padece.

*eduardo.avalos@epn.edu.ec
Recibido: 26/03/2020
Aceptado: 08/05/2020
Publicado: 31/05/2020
10.33333/rp.vol45n2.06
CC BY 4.0

Existen varios tipos de radiación láser, clasificadas según su potencia o energía en alta, media y los denominados baja potencia, también conocidos como láseres blandos (soft-laser o terapéuticos), por el efecto fotoquímico que predomina en él, ya que al incidir el haz de luz sobre la piel o mucosa, se deposita una gran cantidad de energía que provoca a nivel celular un desencadenamiento de reacciones bioquímicas, bioeléctricas y bioenergéticas (Zaldívar, y otros, 1997) que logran producir un efecto analgésico, antiinflamatorio y bioestimulante, según la dosis de energía utilizada, en la Tabla 1 (España, y otros, 2004), se muestra los distintos láseres que son utilizados en medicina para diferentes tratamientos de enfermedades, a los cuales se los asigna un valor numérico que corresponde al uso de cada láser; es decir: 0=contraindicado, 1=se puede utilizar, 2=indicado, 3=bastante indicado y 4=muy indicado.

Tabla 1. Tratamientos en terapéutica dental.

Tratamiento/Láser	Diodo	Nd:YAG	Er,Cr:YSGG	Er:YAG	CO2
Preparación de cavidades	0	1	4	4	0
eliminación de composites	0	0	4	4	0
Grado de esmalte	0	1	4	4	2
Sellado de fosas y fisuras	1	2	4	4	1
Hiperestesia dentinaria	1	2	4	4	2
Endodoncia	4	4	2	2	1
Carillas estéticas	0	0	4	4	0
Blanqueamiento dental	4	4	0	0	1
Preparación de coronas	0	0	3	3	0

El tratamiento con luz láser resulta ser una técnica no invasiva, efectiva y menos doloroso que otros tratamientos tradicionales ya que la luz actúa de manera directa al penetrar la piel. La luz es absorbida por los cromóforos (sustancias que tiene electrones), es decir la energía de la luz es transformada a energía útil desencadenando una serie de procesos bioquímicos como es el aumento de oxígeno y liberación de óxido nítrico en las células afectadas por los virus, dando como resultado la reducción del dolor, inflamación y acelera el metabolismo intracelular (Pacheco, y otros, 2014).

Los últimos avances en mecanismos tecnológicos en el tratamiento con láser han hecho que cada vez sea más factible usarlo en diversas áreas de la medicina, ya que el tejido humano transmite la luz roja de manera eficiente, en donde la profundidad de penetración de la luz dependerá de la longitud de onda y dosificación adecuada. La profundidad que alcanza la luz varía en cada tejido, al igual que el tiempo de la aplicación de la misma que puede durar entre 30 a 90 segundos aproximadamente (Stolik, y otros, 2000) (Tutivén, 2017).

La irradiación representa la cantidad de energía acumulada en el tiempo que incide en una área, por ejemplo tenemos la irradiación solar que cae sobre la superficie de la tierra la cual esta expresada en kilovatio hora ó kiloJoule por metro cuadrado (kWh/m^2 ó kJ/m^2) para un valor constante de sol (Ponce, 2018). De la misma manera se mide la irradiación de un haz de luz láser al incidir sobre la piel, el cual es un parámetro fundamental para poder producir efectos bioquímicos en las células afectadas y estas transformen la energía irradiada por medio de los cromóforos para cerrar vasos sanguíneos y evitar que la sensación de dolor se propague al sistema nervioso, por otra parte se tiene que tener

en cuenta que no debe ser elevada puesto que podría causar daños en el tejido ni tampoco debe ser baja ya que los cromóforos no reaccionarían (Stolik, 2000).

La expresión (1) muestra la ecuación general de la irradiación, donde el flujo irradiante (E) es energía emitida o reflejada por una superficie (W/cm^2) acumulado en un intervalo de tiempo (s).

$$D = E \cdot t \left[\frac{J}{cm^2} \right] \quad (1)$$

En (Marotti, 2009), se presenta un artículo donde se hace el tratamiento de un herpes simple labial con luz láser de baja intensidad varias personas, con un equipo comercial desarrollado en Brasil, el cual muestra un resultado muy bueno en la zona afectada, las lesiones fueron irradiadas con el láser dúo a una longitud de onda de 660 nm en modo continuo y una energía de $120 (J/cm^2)$, $40 (mW)$ durante 2 minutos. El tratamiento se lo repitió cada 24 horas, después de 72 horas y 1 semana. Se muestran los resultados esperados en la estética de los labios, como se presenta en la Figura 1.

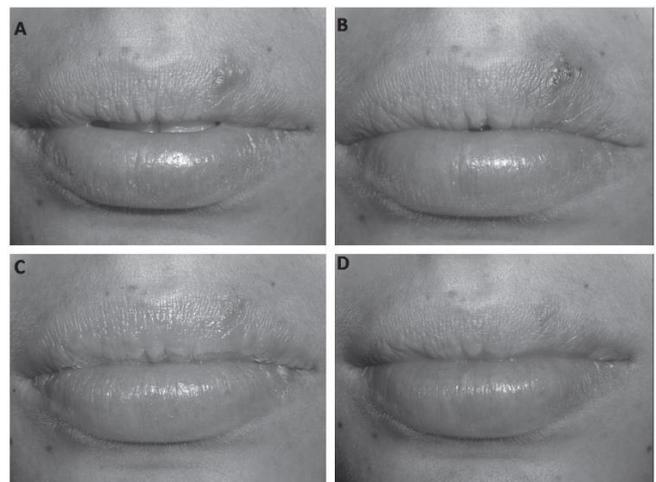


Figura 1. A) Lesión antes del tratamiento con láser, B) Misma lesión después de aplicar el láser, C) Lesión después de 24 horas de tratamiento, D) Una semana después.

En (Hernández, y otros, 2013) se toma un grupo de personas que padecen de aftas bucales (N=90), pacientes mayores de 5 años de edad y que desearon participar en la investigación, a este grupo se lo dividió en grupo A y B de 45 pacientes cada uno, al grupo A se le aplicó terapia láser con parámetros analgésicos, antiinflamatorios durante 7 días, con una potencia de 30 mW, en un tiempo de 36 seg, y una dosificación de 1-3 J/cm^2 , el equipo comercial utilizado fue uno de fabricación cubana LASERMED 670 DL, que utiliza como emisor un diodo láser de arseniuro de galio y aluminio (GA As AL), con una longitud de onda de 670 nm.

Al grupo B se lo trató con tintura de propóleo al 5% (medicamento local), con una frecuencia diaria hasta los 7 días de tratamiento. Mas de la mitad de los pacientes tratados con terapia láser eliminaron y redujeron el dolor en comparación con el otro grupo.

El presente trabajo pretende desarrollar un prototipo portátil para ser usado como alternativa en odontología, contiene dos láseres de baja potencia, láser rojo (660nm) y láser infrarrojo (808nm) los cuales se activarán de manera alternada

dependiendo del problema a tratar, mediante un arreglo de espejos y lentes se direcciona la luz a un punto para luego ser transportada por una fibra óptica, de esta manera la luz es dirigida fácilmente a la llaga bucal. La electrónica implementada será la encargada de proveer la potencia y energía necesaria para el tratamiento de enfermedades que aparecen en la boca.

2. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

2.1 Beneficios de la luz en la piel

Según la teoría de mecánica cuántica, la energía de la luz está compuesta de fotones o paquetes discretos de energía electromagnética. La energía de un fotón depende solo de la longitud de onda, por tal razón la energía de una dosis de luz depende solo de la cantidad de fotones y de su longitud de onda. Los fotones que se envían al tejido vivo pueden ser absorbidos o dispersados, los fotones dispersados escapan del tejido en forma de reflexión difusa, mientras que los fotones absorbidos interactúan con una molécula orgánica o cromóforo ubicado dentro del tejido. Debido a que estos fotones tienen longitudes de onda en las regiones roja e infrarroja, los cromóforos que absorben estos fotones tienden a tener electrones que son excitados por la cantidad de energía que entrega el fotón (Pacheco, 2014). De acuerdo con la primera ley de termodinámica, la energía entregada al tejido debe conservarse, lo que ocurre cuando la luz es absorbida por el tejido vivo se llama conversión interna, esto sucede cuando el primer estado excitado del cromóforo sufre una transición de un estado electrónico alto a uno bajo (Núñez, 2014). La energía del estado excitado se emite en forma de calor, la energía entregada al tejido puede ser transformada en fluorescencia. La fluorescencia es una luminiscencia en la cual la absorción molecular de un fotón desencadena la emisión de otro fotón con una longitud de onda más larga, la diferencia de energía entre los fotones absorbidos y emitidos termina como calor.

El tejido cumple con dos características ópticas importantes, como son: la absorción y la penetración. La energía que llevan los fotones al ser absorbidos por los cromóforos (sustancias que contienen electrones) es transformada a energía útil desencadenando una serie de procesos bioquímicos como es el aumento de oxígeno y liberación de óxido nítrico en las células afectadas, dando como resultado la reducción del dolor, inflamación y acelera el metabolismo intracelular (Carrasco, y otros, 2018). Existen tres áreas de la medicina en las que la luz láser juega un papel importante como se muestra en la Figura 2, estos son: cicatrización de heridas y reparación de tejidos, alivio de la inflamación en enfermedades crónicas y lesiones, alivio del dolor neurogénico y algunos problemas neurológicos (Calabrese, 2011).

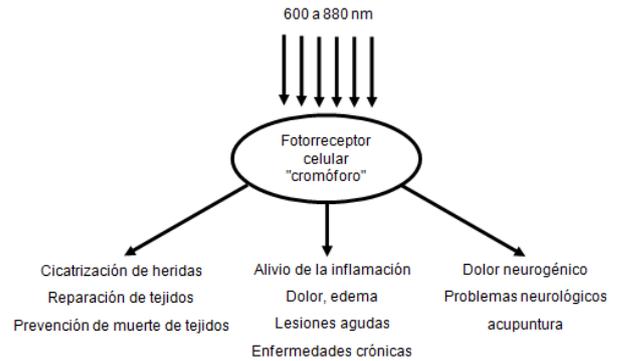


Figura 2. Representación esquemática de las principales áreas de aplicación con luz en el espectro rojo e infrarrojo.

Hay que considerar las propiedades ópticas del tejido, ya que tanto la absorción como la dispersión de la luz en el tejido dependen de la longitud de onda y el cromóforo tisular principal (hemoglobina y melanina) tiene bandas de absorción a altas en longitudes de onda cortas inferiores a los 600 nm, el agua comienza a absorberse a longitudes de onda superiores a 1150 nm, por tal razón se presenta un ventana óptica la cual se observa en la Figura 3, en donde las longitudes de onda roja e infrarroja maximizan la penetración efectiva de la luz en el tejido (Hamblin, y otros, 2013).

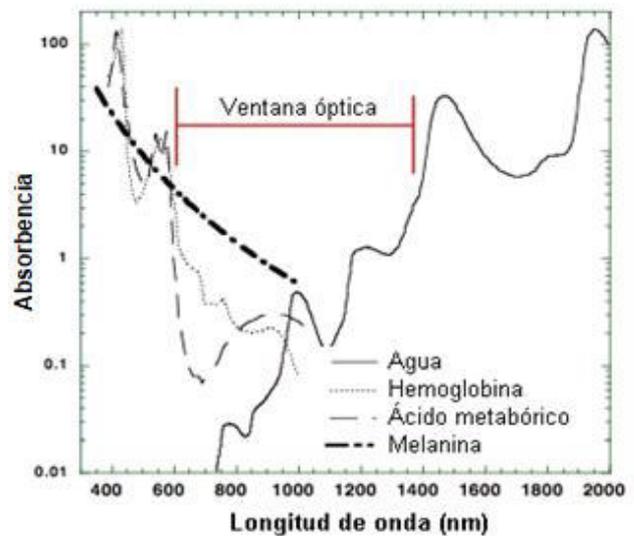


Figura 3. Ventana óptica en el tejido debido a la absorción de longitudes de onda roja e infrarroja por los cromóforos.

2.2 Estudios clínicos

La terapia con láser de baja potencia se usa para tratar una gran variedad de enfermedades y dolores musculares agudos y crónicos, por ejemplo: los dentistas lo usan para tratar los tejidos orales inflamados y curar diversas úlceras, los dermatólogos para tratar acné, manchas en la piel y quemaduras, los ortopedistas lo usan para aliviar el dolor y tratar inflamaciones crónicas. La luz generada por láseres y LEDs se aplica directamente a las áreas a tratar, por ejemplo: heridas, lesiones, úlceras, o en varios puntos del cuerpo, por ejemplo: puntos de acupuntura, puntos de activación muscular. Las aplicaciones clínicas de la terapia con luz de baja potencia son diversas, su uso se caracteriza por una variedad de metodologías para las diversos láseres y LEDs con sus especificaciones como: longitud de onda, potencia de salida, modos de operación (onda continua o pulsada) y parámetros

de pulsos. En los últimos años se ha preferido longitudes de onda largas (650 a 880 nm) y potencias de salida altas (hasta 100 mW) en dispositivos terapéuticos, especialmente para permitir una penetración tisular profunda (Hamblin, 2013).

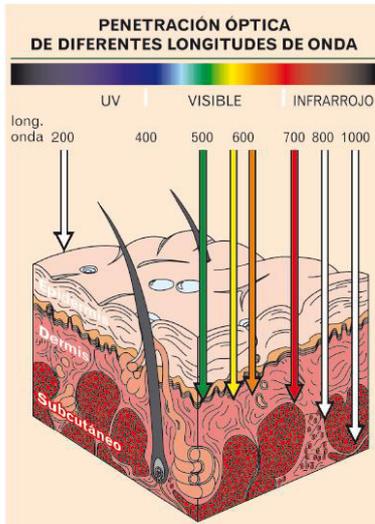


Figura 4. Penetración de la luz en la piel.

2.3 Enfermedades de la boca

Muchas lesiones en el tejido de la boca se relacionan con problemas anatómicos, funciones del organismo y otras aparecen como reacciones que generalmente son de origen nutricional e inmunológico, muchas de las cuales son difíciles de tratar con medicina tradicional, por lo general las aftas, llagas y úlceras que aparecen con frecuencia se relacionan más con enfermedades digestivas. El desarrollo de un afta suele prolongarse por días y pasa por varios periodos hasta desaparecer, proceso que es muy doloroso y con sensación de quemazón, son ovaladas, de color blanquecino rodeadas por una corona rojiza, las aftas pueden surgir en cualquier parte de la vía oral como se muestra en la Figura 5. (Pacho, y otros, 2006).

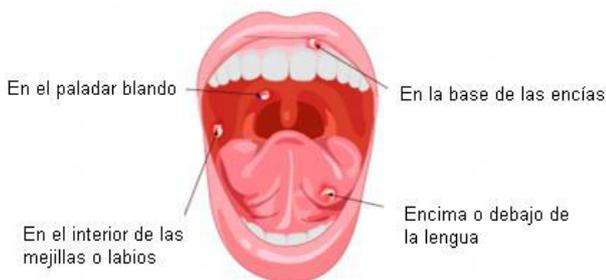


Figura 5. Zonas de la boca en que se desarrollan las aftas.

El herpes labial es otro problema de salud bucal que afecta aproximadamente un tercio de la población, causado por Herpes virus hominis el cual se transmite por saliva infectada, sin embargo, algunas personas pueden tener este virus sin haber desarrollado ningún síntoma, al estar presente en el tejido blando de la boca produce una afección eruptiva aguda de uno o más grupos de vesículas, causando lesiones dentro de la boca para contrarrestar estos virus el organismo desarrolla anticuerpos. Causa frecuentes episodios de malestar, dolor y estética, los medicamentos antivirales no han tenido éxito en

la eliminación total del virus (de Paula, y otros, 2013) (González, y otros, 2008).

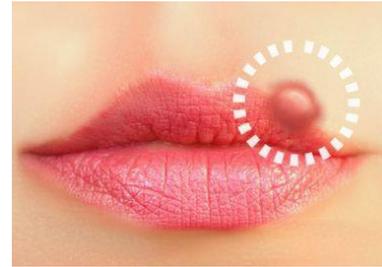


Figura 6. Herpes labial simple.

En avance tecnológico se han hecho un sinnúmero de estudios relacionados a la luz láser usado para tratamientos de enfermedades de la vía oral, obteniendo buenos resultados en el proceso, el láser al producir calor en la zona irradiada hace que suceda una reacción bioquímica en las células afectadas, la luz es absorbida por los cromóforos en la cadena respiratoria de las mitocondrias, dando lugar a cambios fundamentales, como el aumento de oxígeno y liberación de óxido nítrico. La estimulación nerviosa mediante un láser altera la hiperpolarización de la membrana celular y aumento de la concentración de ATP (nucleotido), que contribuye a mantener la estabilidad de la membrana y disminuyendo el umbral de dolor (Schindl, y otros, 1999).

2.4 Tratamiento de enfermedades bucales con láser

El tratamiento con láser implica un gran número de parámetros en ciertos casos se suele usar un fotosensibilizador con absorción resonante por la fuente de luz. Las fuentes de luz más utilizadas son los láseres rojos e infrarrojos, debido a sus ventajas como es producir una sola longitud de onda y la dosimetría de la luz adecuada es fácil de calcular, al final el rayo láser puede pasar a través de una fibra óptica para tratamiento localizado. Es así que la radiación con luz láser cumple el objetivo de tratar ciertas enfermedades bucales irradiando la zona afectada, ocasiona cambios físicos y químicos denominados procesos fotobiológicos los cuales se los usan ventajosamente en combatir enfermedades de la piel (Marotti, y otros, 2009). La radiación con láser de baja potencias, desencadena una serie de reacciones bioquímicas, biogénicas y bioeléctricas a nivel celular, lo que reduce la sensación de dolor, edema y estimula la regeneración tisular (tejido afectado) (Pacheco, 2013) (Valiente, y otros, 1997).

3. METODOLOGÍA

El proyecto al ser un primer estudio se emplea la investigación aplicada, ya que con el desarrollo de este prototipo se espera dar una solución alternativa al uso de tratamientos convencionales como: pomadas o soluciones usadas para enfermedades que se presentan en la boca o sus alrededores. El tratamiento no invasivo se lo realiza mediante la irradiación con luz láser de baja potencia. Para lograrlo, se realizó la recopilación de fuentes bibliográficas como: libros, revistas médicas, artículos científicos y páginas web.

En la Figura 7, se muestra la estructura general del prototipo el cual se compone de cuatro sistemas que son esenciales para el funcionamiento y un fácil manejo de usuario, los cuales se describen a continuación.

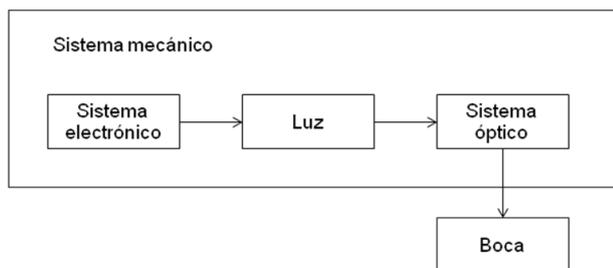


Figura 7. Esquema general del sistema bifrecuencial.

El sistema electrónico es el encargado de suministrar la potencia eléctrica necesaria a cada componente digital o analógico, con el objetivo de tener un buen control de la irradiación producida por cada uno de los láseres. Cuenta con una pantalla OLED que permite interactuar con el usuario, en pantalla se muestran variables importantes del sistema como es el porcentaje de batería, menús, energía aplicada por cada láser y mensajes de batería baja o carga completa, los mensajes se acoplan a un LED de notificaciones mediante una salida digital de la tarjeta de desarrollo para hacerlos más perceptibles.

El sistema óptico es el encargado de direccionar la luz generada por los láseres hacia un mismo punto mediante un arreglo de espejos, la luz direccionada pasa por una fibra óptica que se usa en equipos odontológicos para ser irradiada en la zona a tratar.

El haz de luz que se irradia en la zona de muestra es generado por láseres de baja potencias a dos longitudes de onda diferentes las cuales están en el espectro de emisión de 660 nm y 808 nm, luz roja e infrarroja respectivamente, activándose uno a la vez dependiendo del problema a tratar.

Finalmente, el sistema mecánico da soporte a todos los componentes que constituyen al prototipo como son: los espejos, los láseres, el circuito electrónico y la pantalla de visualización. Cuenta con un diseño de fácil maniobrabilidad y ergonomía.

3.1 Sistema óptico

Al ser el prototipo un sistema bifrecuencial se tiene que direccionar la luz de los láseres hacia un mismo punto mediante un arreglo de un espejo y un espejo dicroico para luego ser dirigida por una fibra óptica comercial usada en odontología, en la Figura 8. se muestra el direccionamiento de la luz hacia un mismo punto.

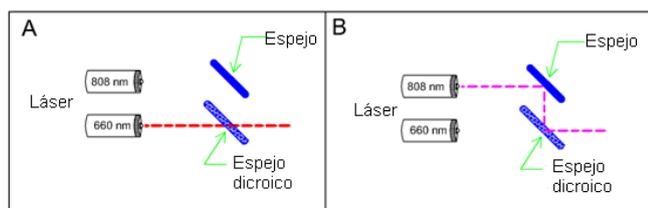


Figura 8. Trayectoria de los haces de luz.

La luz roja (660 nm) pasa el espejo dicroico para ser concentrada en un punto como se puede ver en la Figura 8.A, mientras que la luz infrarroja (808 nm) primero es reflejada en el espejo después se refleja nuevamente en el espejo dicroico para concéntrense en el mismo punto donde incide la luz roja,

como se observa en la Figura 8.B. El objetivo de concentrar las luces en un punto es para que toda la luz sea dirigida hacia una fibra óptica y está la conduzca hacia la zona a irradiar.

3.2 Sistema electrónico

El principal objetivo del sistema electrónico es el control de la irradiación producido por las fuentes láser, compuesto por módulos que permiten la alergización de los distintos elementos presentes en la placa electrónica. Este sistema electrónico se conforma del sistema de potencia y de control, los cuales están aislados para evitar fallos y seguridad del sistema en general.

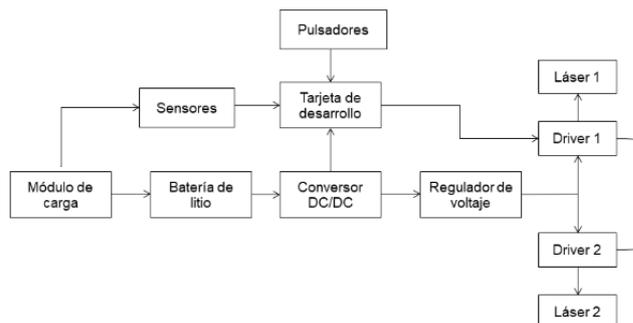


Figura 9. Diagrama en bloques del sistema electrónico general.

El sistema electrónico de potencia inicia con el módulo de carga, el cual es utilizado para carga y protección de la batería, la batería de litio es la encargada de suministrar energía a todo el sistema, la energía almacenada por la batería es tomada directamente por el convertor DC/DC para elevarla a un voltaje mayor al de la batería para poder energizar los demás elementos como los láseres, sensores y tarjeta de desarrollo.

El sistema electrónico de control está conformado por una tarjeta de desarrollo el cual integra un microcontrolador en su estructura como elemento central de control, es encargado de controlar los actuadores y procesar las señales analógicas y digitales captadas por los puertos de entrada y salida.

3.3 Sistema electrónico

La función del sistema mecánico es albergar la placa PCB y los componentes ópticos, a más de acoplar la fibra al sistema óptico, el diseño mecánico se lo realiza en el software de ingeniería y modelado SolidWorks muy usado a nivel mundial en industrias manufactureras, automotrices y robótica.

SolidWorks presenta una interfaz amigable y entendible donde las piezas se crean a partir de los dibujos o ensamblajes, además se puede importar la placa PCB simulada en Proteus para verificar que las dimensiones son las correctas para el prototipo, el sistema mecánico consta de tres partes como son: el soporte de los lentes y de los láseres, los cuales son sujetos y fijados por la carcasa hecho en plástico (PLA) en la Figura 10 se muestra el resultado final.

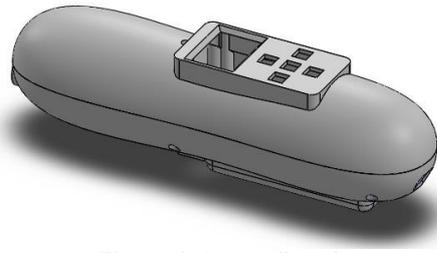


Figura 10. Carcasa diseñada.

3.4 Hardware del sistema

El diseño del sistema electrónico se lo hace en Proteus, el cual es un software conformado por dos aplicaciones Isis y Ares, los cuales permiten de manera interactiva la simulación de circuitos electrónicos y diseño de pistas PCB, en su paquete de instalación se encuentran librerías de componentes electrónicos pasivos o activos de todos los fabricantes que existen en el mercado de los circuitos integrados, también permite cargar a los microcontroladores presentes en sus librerías con los programas previamente realizados en los ensambladores y compiladores según sea el lenguaje de programación elegido (tecnicaslomas.com, 2019).

La placa PCB se la realiza a doble lado, de esta manera reducir el tamaño y aprovechar mejor el espacio, en un lado se colocan todos los módulos, en el otro la tarjeta de desarrollo y demás elementos e integrados como se ve en la Figura 11, con dimensiones de 40 mm x 82.5 mm, por seguridad se usa conectores tipo Molex para las conexiones.

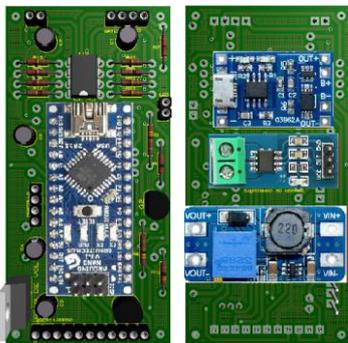


Figura 11. Placa PCB principal realizada a doble lado.

Para la parte de los botones que se integran al prototipo se realizó otra PCB de 32.5 mm x 30 mm para poder acoplarle a la carcasa. La PCB de los botones se muestra en la Figura 12.

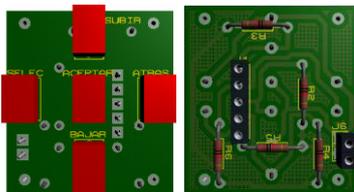


Figura 12. Placa PCB de los botones.

3.5 Software del sistema

El desarrollo del software de control se lo realiza en lenguaje de programación de Arduino IDE, debido a que ofrece un entorno de programación amigable mediante el uso de librerías que se encuentran en el paquete de instalación o que se las

puede descargar de internet para luego ser compilada en la tarjeta de desarrollo.

En la Figura 13, se presenta el diagrama de entradas y salidas utilizado en la tarjeta de desarrollo, las cuales son programadas para recibir señales de voltaje generadas por los sensores, esta información es procesada y enviada mediante comunicación a dos hilos para ser visualizarla en forma de caracteres en pantalla y notificaciones visuales. La tarjeta de desarrollo envía señales de control que aumentan o disminuyen la intensidad de luz mediante pulsadores que se integran a las entradas digitales creando una interacción fácil y accesible para el usuario final.

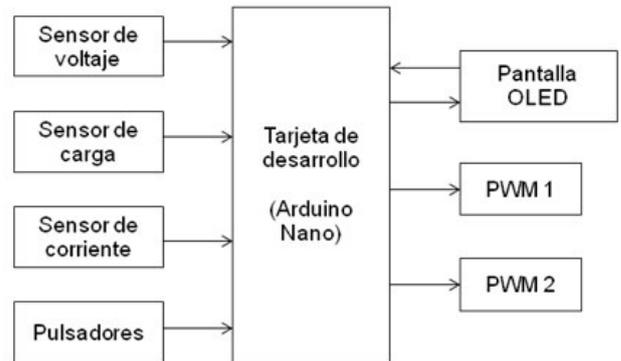


Figura 13. Diagrama de entradas y salidas de la tarjeta de desarrollo.

En el monitoreo de la batería los sensores son los encargados de medir el porcentaje de batería, si se conecta el cargador o si está cargado completamente, cuidando siempre que no se pase de los límites de carga 4.2 (V) y de descarga 2.8 (V), en la Figura 14, se presenta el diagrama de flujo de carga y descarga de la batería.

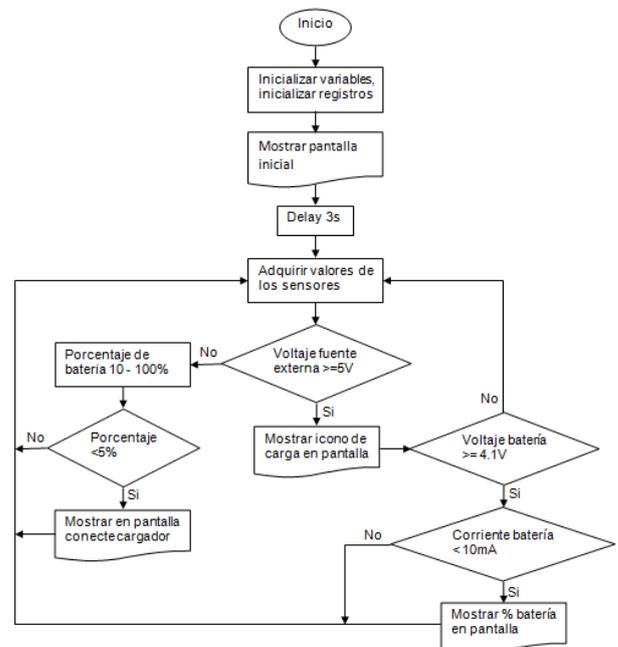


Figura 14. Diagrama de flujo para monitoreo de la batería.

3.6 Resultados

Las pruebas que se realizan al equipo para la verificación del funcionamiento del equipo son: autonomía del equipo, sistema óptico y pruebas térmicas. Todas estas pruebas se las hizo basándose en las normas InMetro de Brasil y artículos publicados.

3.6.1 Pruebas de autonomía del equipo

La autonomía del prototipo se la calcula midiendo la corriente de consumo al estar siendo usado el láser a diferentes intensidades para lo cual se utiliza un multímetro ProsKit MT-1270, las mediciones tomadas se encuentran en la Tabla 2, la Figura 15 muestra la medición tomada al estar operativo el láser rojo a la máxima intensidad.



Figura 15. Consumo máximo de corriente.

Teniendo en cuenta la capacidad de la batería KeepPower de 2600 mAh, se tiene un tiempo aproximado de autonomía del prototipo que se la calcula mediante la ecuación (2), los resultados se encuentran en la Tabla 2 y Tabla 3.

$$t = \frac{2600 \text{ mAh}}{I} \tag{2}$$

Donde (*t*) es el tiempo de autonomía en horas e (*I*) es la corriente de consumo expresada en mili-amperios.

Tabla 2. Resultados obtenidos del láser rojo.

Iluminación [%]	Corriente [mA]	Tiempo de autonomía [hrs]
0	150	17.33
20	250	10.42
40	350	7.42
60	470	5.53
80	560	4.64
100	600	4.33

Tabla 3. Resultados obtenidos del láser infrarrojo.

Iluminación [%]	Corriente [mA]	Tiempo de autonomía [hrs]
0	150	17.33
20	190	13.68
40	270	9.62
60	350	7.52
80	430	6.05
100	480	5.41

Al ser un sistema bifrecuencial se debe tener en cuenta que se enciende un láser a la vez dependiendo del tipo de problema a tratar, entonces de las Tablas 2 y 3 se tienen dos tiempos de autonomía, uno de 4.33 horas si únicamente se le tiene funcionando al láser rojo a su máxima intensidad y otros de 5.41 horas si únicamente funciona el láser infrarrojo a su

máxima intensidad, estos dos tiempos son suficientes para el tratamiento fotodinámico ya que los tiempos de aplicación no van más allá de los tres minutos.

3.6.2 Pruebas de irradiancia

Las pruebas de irradiancia se las realiza de acuerdo con la Norma InMetro 8381 (inmetro.gov.br, 2019), con la ayuda de un radiómetro DeltaOhm HD 2102.2, el cual es un instrumento portátil con visualización LCD que mide la irradiancia en las regiones espectrales VIS-NIR, UVA, UVB y UVC. Para la medición de la irradiancia cuenta con una sonda la cual una vez conectada es reconocida automáticamente por el equipo, este instrumento tiene una función adicional que es la integral en el tiempo; es decir, calcula la densidad de energía (irradiación). Los datos son almacenados en la memoria interna del equipo los cuales se pueden transmitir directamente en tiempo real a una PC conectado al instrumento mediante un puerto USB 2.0 (DeltaOHM, 2019). En la Figura 16 se muestra la sonda LP 471 RAD conectada al radiómetro tomando muestras de la irradiancia y densidad de energía del láser rojo.



Figura 16. Pruebas de irradiancia e irradiación.

Se realizaron cinco pruebas, a diferentes niveles de potencia con una separación de 5 mm a la sonda a un tiempo máximo de 3 minutos por aplicación, el área irradiada tiene un diámetro de 8 (mm). Los resultados se encuentran en las Tablas 4 y 5, con la ecuación (3) se calcula la energía en cada prueba.

$$E = P \cdot t \tag{3}$$

Donde (*E*) es la energía, (*P*) es la potencia aplicada en Watt y *t* es el tiempo de aplicación expresado en segundos.

Tabla 4. Datos de irradiancia e irradiación del láser rojo.

Nivel [mW]	Irradiancia [mW/cm ²]	Tiempo [seg]	energía [J]	irradiación [J/cm ²]
20	4.6	180	3.6	0.81
40	9.5	180	7.2	1.22
60	14.8	180	10.8	2.52
80	20	180	14.4	3.52
100	25.5	180	18	4.11

Tabla 5. Datos de irradiancia e irradiación del láser infrarrojo.

Nivel [mW]	Irradiancia [mW/cm ²]	Tiempo [seg]	energía [J]	irradiación [J/cm ²]
20	1	180	3.6	0.11
40	3	180	7.2	0.42
60	7.2	180	10.8	1.13
80	12	180	14.4	1.83
100	15	180	18	2.36

Los resultados obtenidos en la Tabla 4 y Tabla 5 se los comparan con estudios similares publicados en revistas médicas de equipos usados en el tratamiento con luz para enfermedades de la boca, cuyos datos se presentan en (Hernández Díaz & Orellana Molina, 2019; Núñez, 2014). En (Núñez, 2014) se encuentra un protocolo médico brasileño el cual es usado en el tratamiento fotodinámico de un equipo comercial que usa dos longitudes de onda denominado "Láser Duo", el cual aplica dosis similares al de la Tabla 6 dependiendo de la enfermedad a tratar.

Tabla 6. Plan dosificado de aplicación de energía.

Efecto terapéutico deseado	Dosis recomendada [J/cm^2]
analgésico	
- Dolor muscular	2 - 4
- Dolor articular	4 - 8
Antiinflamatorio	
- Agudas	4 - 6
- crónicas	4 - 8
reparación tisular	8 - 12

De la Tabla 6 se concluye que con el prototipo realizado se puede tener las dosificaciones recomendadas al aumentar el tiempo de aplicación de 3 a 4 minutos.

3.6.3 Pruebas espectrales

Las pruebas espectrales se las realizan basadas en la Norma InMetro 8164 (inmetro.gov.br, 2019), y utilizando el espectrómetro FLAME-S-VIS-NIR-ES de Ocean Optics, al cual tiene como aditamento una fibra óptica que facilita el direccionamiento de la luz hacia el sensor, proporcionando los datos adecuados del espectro de emisión. El espectrómetro se conecta al computador mediante comunicación serial como se muestra en la Figura 17 para mostrar el espectro de emisión en la pantalla.

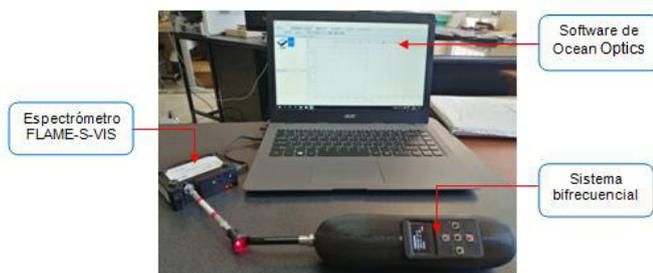


Figura 17. Adquisición de los espectros de emisión.

La prueba se lo realiza directamente con la luz generada por cada láser después de pasar por cada elemento óptico como lentes, espejo, espejo dicróico y fibra óptica los cuales interfieren en la medida distorsionando el espectro de emisión y la dispersión de la luz. Los resultados se presentan en las Figura 18 y Figura 19 los cuales corresponden al espectro de emisión de la luz rojo e infrarrojo respectivamente.

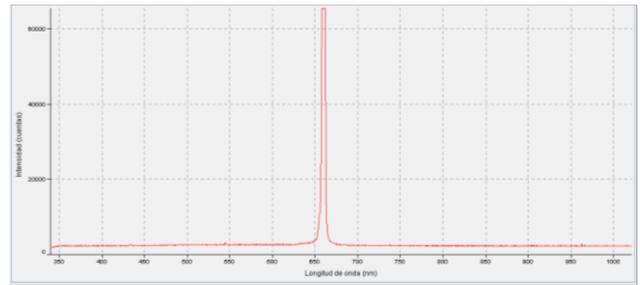


Figura 18. Espectro de emisión de la luz roja.

En la Figura 18 se observa que tiene un pico en los 660 (nm) con una dispersión de ± 7 (nm).

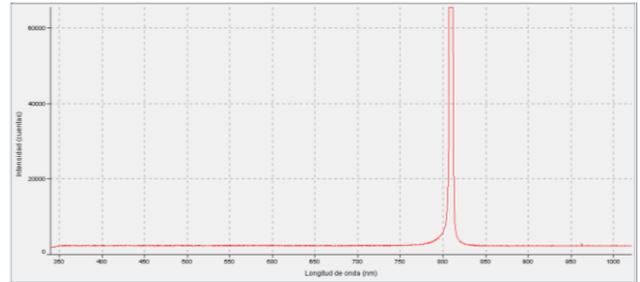


Figura 19. Espectro de emisión de la luz infrarroja.

En la Figura 19 se observa que tiene un pico en los 808 (nm) con una dispersión de ± 10 (nm).

3.6.4 Pruebas térmicas

Las pruebas térmicas del prototipo se las realiza de acuerdo con la Norma InMetro 8297 (inmetro.gov.br, 2019), usando un termómetro FLUKE de la serie VT, el cual es un termómetro visual de infrarrojo, que combina una medición de punto central con una imagen digital y una imagen superpuesta de mapa calorífico. En la Figura 20, se observa la pantalla del termómetro con los detalles que presenta en ella como es: la temperatura máxima y mínima, la hora y fecha, emisividad. La pantalla cuenta con un cursor que facilita la medición de la temperatura máxima y mínima.

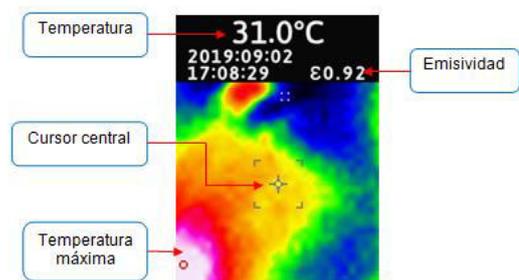


Figura 20. Pantalla del termómetro FLUKE VT04.

Las pruebas térmicas se realizaron activando cada láser a su máxima intensidad, después de 10 minutos de estar en funcionamiento se realiza la medición térmica en donde se tiene una temperatura máxima de 40 (°C), la cual es generada por el regulador de voltaje de los láseres, si bien esta temperatura es alta no afecta al elemento ya que en las especificaciones técnicas del fabricante dice que la temperatura máxima que soporta es 120 (°C), otra temperatura muy similar se registró en la resistencia de protección del láser de aproximadamente 38 (°C), en el resto de elementos se

mantenía una temperatura que oscilaba entre los 30 a 33 (°C) la cual no se considera alta, en la Figura 21 se presenta las imágenes térmicas tomadas del prototipo.

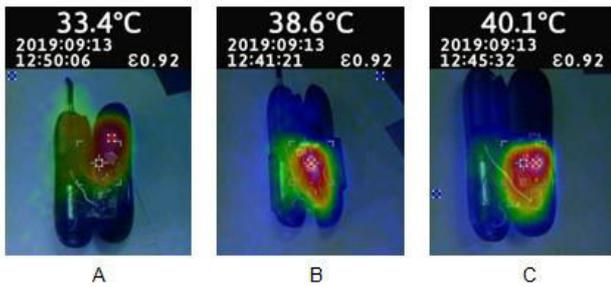


Figura 21. Pruebas térmicas.

Actualmente el Laboratorio de Aplicaciones Ópticas y UAVs se encuentra realizando los protocolos médicos y el registro sanitario del equipo para ser validado y poder ser usado en personas con todas las seguridades.

IV. CONCLUSIONES

La batería de iones de litio al ser cargada mediante una fuente externa cuenta con protecciones que ayudan a que su vida útil se prolongue por más tiempo, para lo cual se tiene protecciones contra: sobrecarga, sobre descarga y calentamiento, que actúan de manera independiente ante cualquier evento anormal.

La implementación de filtros capacitivos para mejorar las señales en los sensores de voltaje y corriente utilizados, son de mucha importancia pues ayudan a tener una señal que no varíe en el tiempo, de esta manera no se pierde información al momento de ser procesada por la tarjeta de desarrollo mediante los puertos análogos.

La selección del circuito integrado LM358 como sensor de voltaje se lo hace por las características propias del integrado como: impedancia de entrada alta, presenta poco ruido de entrada, únicamente necesita una fuente de alimentación. Por su tamaño, el integrado contiene dos amplificadores operacionales suficientes para el sistema.

Al programar los registros del OCR0, se tiene dos señales modulares, las cuales tienen una frecuencia de 3 KHz y se activan dependiendo del láser que se va a utilizar. Estas señales de control se envían hacia los transistores para que trabajen en corte y saturación a la frecuencia mencionada, de esta manera se regula el voltaje para tener varios niveles de iluminación asociado directamente con la irradiancia, es decir mientras más grande sea la relación de trabajo más alto será el nivel de irradiancia.

El modelo óptico está basado en arreglos de espejos y lentes, los cuales constituyen una manera práctica para direccionar los haces de luz hacia un mismo punto, dando como resultado un espectro de emisión continuo, conservando los principios físicos de la luz láser.

En lo que a los conectores concierne se utilizó conectores tipo Molex con ciertas modificaciones ya que por sus características constructivas ocupan mucho espacio, se recortó la base de estos liberando así un espacio de 3 mm, al alterar el diseño de los conectores se pierden las muescas de seguridad que tienen, para saber cómo va conectado se pinta una de las caras de cada conector dirigida hacia afuera de la PCB.

El prototipo al poseer una batería de iones de litio, una pantalla de visualización y botones lo convierte en un equipo portátil con un tiempo de autonomía de 4 a 5 horas funcionando a su máxima irradiancia (25 mW/cm²) para el láser rojo y (15 mW/cm²) para el láser infrarrojo.

REFERENCIAS

- Calabrese, G. (2011, agosto). Láser y luz pulsada intensa. *Revista Médica de Uruguay*, p. 8.
- Carrasco Paz y Miño, M. P. (2018). *Eficacia de la Terapia Fotodinámica con láser de baja potencia, en tratamiento periodontal básico, en estudio clínico, Randomizado* (Tesis de pregrado). Universidad San Francisco de Quito, Quito, Ecuador.
- De Paula Eduardo, C., Aranha, A. C. C., Simões, A., Bello-Silva, M. S., Ramalho, K. M., Esteves-Oliveira, M., ... Tunér, J. (2013). Laser treatment of recurrent herpes labialis: A literature review. *Lasers in Medical Science*. Doi: 29. 10.1007/s10103-013-1311-8.
- DeltaOHM. (2019, septiembre 30). DeltaOHM [Html]. Recuperado el 30 de septiembre de 2019, de DeltaOHM-Manual de instrucciones.
- España-Tost, A. J., Arnabat-Domínguez, J., Berini-Aytés, L., & Gay-Escoda, C. (2004). Aplicaciones del láser en Odontología. *RCOE*, 9(5). 497-511.
- González, B. M., Hernández, A., & Estevez, A. (2008). Tratamiento del herpes simple labial con láser de baja potencia. *Colombia Médica*, 39(2), 175-181.
- Hamblin, M. R. (2013, febrero). Mechanisms Of Low Level Light Therapy [Asp]. Recuperado el 8 de agosto de 2019, de Massachusetts General Hospital.
- Hamblin, M. R., & Huang, Y.-Y. (2013). *HandBook of Photomedicine* (1st ed.).
- Hernández Díaz, A., & Orellana Molina, A. (2019, septiembre 22). Dosimetría en láseres de baja potencia [Medica]. Recuperado el 22 de septiembre de 2019, de Centro de Aplicaciones Tecnológicas y Desarrollo Nuclear (CEADEN).
- inmetro.gov.br. (2019a, octubre 15). Norma de Espectrometría [Html]. Recuperado el 15 de octubre de 2019, de InMetro.

- Marotti, J., Aranha, A. C. C., Eduardo, C. D. P., & Ribeiro, M. S. (2009). Photodynamic Therapy Can Be Effective as a Treatment for Herpes Simplex Labialis. *Photomedicine and Laser Surgery*, 27(2), 357–363. doi: 10.1089/pho.2008.2268.
- Núñez, S. C. (2014). Protocolo de laser terapia e terapia fotodinâmica laser duo. *MMO tecnologia para a saúde*, 2, 57.
- Pacheco Rodriguez, L. (2013). Desarrollo de un sistema de irradiación para Terapia Fotodinámica Intersticial (Tesis de grado). Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México.
- Pacheco Rodriguez, L., Isakina, S. S., De la Rosa Vazquez, J. M., & De la Cadena Perez Gallardo, A. (2014). Laser Diode System For Interstitial Photodynamic Therapy. *IEEE Latin America Transactions*, 12(4), 574–579.
- Pacho Saavedra, J. A., & Piñol Jiménez, F. N. (2006). Lesiones bucales relacionadas con las enfermedades digestivas. *Revista Cubana de Estomatología*, 43(3).
- Ponce Chango, C. D. (2018). Diseño e implementación de un prototipo para adquisición de imágenes de fluorescencia a ser usado en el diagnóstico de cáncer de piel de tipo no melanoma. (Tesis pregrado). Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.
- Schindl, A., & Neumann, R. (1999). Low-Intensity Laser Therapy is an Effective Treatment for Recurrent Herpes Simplex Infection. Results from a Randomized Double-Blind Placebo-Controlled Study. *Journal of Investigative Dermatology*, 113(2), 221–223.
- Stolik, S., Delgado, J. A., Perez, A., & Anasagasti, L. (2000). Measurement of the penetration depths of red and near infrared light in human “ex vivo” tissues. *Journal of photochemistry and photobiology. B, Biology*. 57. 90-3. Doi: 10.1016/S1011-1344(00)00082-8.
- tecnicallomas.com. (2019, julio 26). Proteus 8.6 [Html]. Recuperado el 26 de julio de 2019, de [Tecnicallomas](http://tecnicallomas.com).
- Tellez Tielves, Norma de la Caridad, Pérez Hernández, Leyda Yenima, Rodríguez Ávila, Jesús, Travieso Pérez, Maritza, & López Blanco, María de las Nieves. (2013). Efectividad del tratamiento con radiación láser de baja potencia en la estomatitis aftosa recurrente. *Revista de Ciencias Médicas de Pinar del Río*, 17(5), 40-50. Recuperado en 13 de mayo de 2020.
- Tutivén Abad, C. F. (2017). Estudio clínico, randomizado, controlado para evaluar la eficiencia de la Terapia fotodinámica con láser de baja potencia como coadyuvante de la Terapia básica periodontal comparada con la Terapia básica periodontal sola. (Tesis postgrado). Universidad San Francisco de Quito, Ecuador.
- Valiente Zaldívar, C. J., & Garrigó Andreu, M. I. (1997). Laser blando en puntos de acupuntura para el tratamiento de enfermedades bucales. *Revista Cubana de Estomatología*, 34, 5–10.

BIOGRAFÍAS



Santiago Matango, Nació el 22 de mayo de 1992 en Quito-Ecuador, sus estudios secundarios los realizó en la unidad educativa “Juan de Salinas”, donde obtuvo el título de bachiller en la especialidad Físico Matemático. Estudió en la Escuela Politécnica Nacional, obteniendo el título de Ingeniero en Electrónica y Control, actualmente se encuentra desarrollando proyectos independientes en áreas a fines.



Eduardo Ávalos es Doctor en Física de la Pontificia Universidad Católica de Río de Janeiro (PUC-EPN) e ingeniero de la Escuela Politécnica Nacional (EPN). Coordinador de la Red Fotónica Brasil – Ecuador. Premio EPN a la Mejor Investigación 2019, y reconocimiento a mejor profesor. Fue Director de Investigación de la EPN, Decano de la Facultad de Ciencias, y director de la Escuela de Ciencias de la Escuela Politécnica Nacional, profesor invitado en la Universidad Católica de Rio de Janeiro, ESP, UFSaoCar Sao Paulo Brasil, coordinador de la REDU. Actualmente es profesor de la Escuela Politécnica Nacional a tiempo completo y se encuentra a cargo del laboratorio de UAV's y Aplicaciones Ópticas.

Preparación de Artículos para la Revista Politécnica Utilizar Mayúsculas en cada Palabra en el Caso del Título

Resumen: Las siguientes instrucciones establecen las pautas para la preparación de artículos para la Revista Politécnica. Los artículos pueden ser escritos en español o en inglés, pero tendrán un resumen de máximo 250 palabras en los dos idiomas. Los autores pueden hacer uso de este documento como una plantilla para componer su artículo si están utilizando Microsoft Word 2013 o superior. Caso contrario, este documento puede ser utilizado como una guía de instrucciones. El número mínimo de páginas será 6 y el máximo 15, Para el envío de los artículos, los autores deben seguir las instrucciones colocadas en el sistema de recepción de artículos del sitio web de la Revista Politécnica (revistapolitecnica.epn.edu.ec). En caso de que su artículo sea en inglés colocar el título y el resumen en los dos idiomas.

Palabras clave: Incluir una lista de 3 a 6 palabras.

Title of Manuscript

Abstract: These instructions give you guidelines for preparing papers for EPN Journal. Papers can be written in Spanish or English; however, an abstract of maximum 250 words and written in both languages is required. Use this document as a template to compose your paper if you are using Microsoft Word2013 or later. Otherwise, use this document as an instruction set. The minimum number of pages will be 6 and the maximum will be 15. For submission guidelines, follow instructions on paper submission system from the EPN Journal website(revistapolitecnica.epn.edu.ec).

Keywords: Include a list of 3 to 6 words.

1. SECCIÓN I

Este documento es una plantilla para versiones Microsoft Word 2013 o posteriores. Si está leyendo una versión impresa de este documento, por favor descargue el archivo electrónico, **revistapolitecnicaformato2020.docx**. En caso de que el autor desee enviar el artículo en formato LaTeX por favor comunicarse con la coordinación de edición (epnjournal@epn.edu.ec). *Por favor, no coloque numeración ni pie de página en el documento presentado.*

No cambie los tamaños de fuente o espaciado de renglones para ajustar el texto a un número limitado de páginas. Utilice cursiva o negrita para dar énfasis a un texto, no subrayado.

2. SECCIÓN II

Para las pautas de presentación, siga las instrucciones emitidas por el sistema del sitio web de la revista de la EPN.

La presentación inicial debe tomar en cuenta todas las indicaciones que se presentan en la plantilla, para de esta

manera tener una buena estimación de la longitud del artículo a publicarse. Además, de esta manera el esfuerzo necesario para la presentación final del manuscrito será mínimo.

Como sugerencia, es importante tomar en cuenta que, el primer autor es el investigador que hizo la mayor parte del trabajo, mientras que el último autor suele ser el profesor quien es el líder intelectual y, a menudo edita y presenta el borrador final del documento.

La Revista Politécnica pondrá en marcha un sistema de transferencia electrónica de derechos de autor en su momento. Por favor, "no" enviar formularios de derecho de autor por correo o fax. A continuación se detallan las consideraciones que se deben tener en cuenta para la presentación final del artículo.

3. SECCIÓN III

3.1 Figuras, tablas y márgenes

Todas las figuras deben ser incorporadas en el documento. Al incluir la imagen, asegúrese de insertar la actual en lugar de un

enlace a su equipo local. Los archivos de: figuras, dibujos, fotografías, etc., deberán enviarse en formato png, con al menos 1200 puntos (resolución) en uno de sus ejes, con leyendas legibles y de tamaño adecuado. El artículo debe contener entre tablas y figuras un máximo de 10.

Las etiquetas de los ejes de las figuras son a menudo una fuente de confusión. Utilice las palabras en lugar de símbolos. Por ejemplo, escriba la cantidad "Magnetización," o "Magnetización M" no sólo "M".

Las figuras y tablas deben estar en la parte superior e inferior de las columnas. Evite colocarlas en medio de ellas. Las figuras y tablas grandes pueden extenderse a lo largo de ambas columnas. Las leyendas de las figuras deben estar centradas debajo de las figuras, los títulos de las tablas deben estar centrados sobre ellas. Evite colocar figuras y tablas antes de su primera mención en el texto. Para la mención de figuras, tablas o ecuaciones utilice las palabras completas con la primera letra en mayúscula, por ejemplo "Figura 1".

Coloque las unidades entre paréntesis. No etiquete los ejes sólo con unidades. Por ejemplo, escriba "Magnetización (A/m)" o "Magnetización (Am⁻¹)", no sólo "Magnetización A/m." No etiquete los ejes con una relación de cantidades y unidades. Por ejemplo, escriba "Temperatura (K)", no "Temperatura K".

Los multiplicadores pueden ser especialmente confusos. Escriba "Magnetización (kA/m)" o "Magnetización (103A/m)". No escriba "Magnetización (A/m) x 1000" porque el lector no sabrá si la etiqueta del eje de arriba significa 16000 A/m o 0,016 A/m. Las etiquetas de las figuras deben ser legibles, con un valor de 8 y sin espacio de separación con la figura.

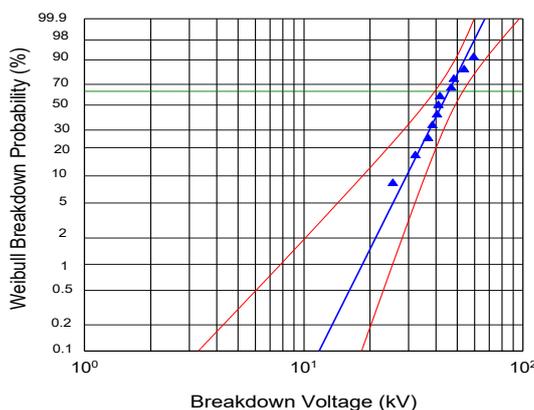


Figura 1. Distribución Weibull de 60 Hz voltajes de ruptura $\alpha = 45,9$ kV $\text{pico}\beta = 5,08$. Intervalo de Confidencia 95%

Los autores deben trabajar activamente con los márgenes solicitados. Los documentos de la revista serán marcados con los datos del registro de la revista y paginados para su inclusión en la edición final. Si la sangría de los márgenes en su manuscrito no es correcta, se le pedirá que lo vuelva a presentar y esto, podría retrasar la preparación final durante el proceso de edición.

Por favor, no modificar los márgenes de esta plantilla. Si está

creando un documento por su cuenta, considere los márgenes que se enumeran en la Tabla 1. Todas las medidas están en **centímetros**.

Tabla 1. Márgenes de página

Página	Superior	Inferior	Izquierda/ Derecha
Primera	2,0	2,5	1,5
Resto	2,0	2,5	1,5

3.2 Ecuaciones

Si está usando MSWord, sugerimos utilizar el *Editor de ecuaciones de Microsoft* o el *MathType* add-on para las ecuaciones en su documento (*Insertar/Objeto/Crear Nuevo/Microsoft Ecuación o Ecuación MathType*). La opción "flotar sobre el texto" no se debe elegir.

Enumere las ecuaciones consecutivamente con los números de la ecuación en paréntesis contra el margen derecho, como en (1). Utilice el editor de ecuaciones para crear la ecuación y esta debe estar localizada en el margen derecho, como se muestra en el ejemplo siguiente:

$$\int_0^{r_2} F(r, \varphi) dr d\varphi = [\sigma r_2 / (2\mu_0)] \quad (1)$$

Asegúrese de que los símbolos en su ecuación han sido definidos antes de que aparezcan en la ecuación o inmediatamente después. Ponga en cursiva los símbolos (T podría referirse a la temperatura, pero T es la unidad tesla). Para referirse a la ecuación se escribe por ejemplo "Ecuación (1) "

3.3 Unidades

Utilice el SI como unidades primarias. Otras unidades pueden ser utilizadas como unidades secundarias (en paréntesis). Por ejemplo, escriba "15 Gb/cm² (100 Gb/in²)". Evite combinar las unidades del SI y CGS, como la corriente en amperios y el campo magnético en oerstedios. Esto a menudo lleva a confusión porque las ecuaciones no cuadran dimensionalmente. Si tiene que usar unidades mixtas, aclare las unidades para cada cantidad en una ecuación.

Por ejemplo, en el SI la unidad de fuerza de campo magnético Hes A/m. Sin embargo, si desea utilizar unidades de T, o bien se refiere a la densidad de flujo magnético B o la fuerza del campo magnético simbolizadas como $\mu_0 H$. Use un punto en el centro para separar las unidades compuestas, por ejemplo, "A·m²."

3.4 Abreviaturas y Siglas

Defina las abreviaciones y acrónimos la primera vez que se utilizan en el texto, incluso después de que ya han sido definidos en el resumen. No utilice abreviaturas en el título a menos que sea inevitable.

3.5 Otras recomendaciones

- Para expresar valores decimales se usarán comas, por ejemplo 3,45. Use un cero antes del decimal.
- Se incluirá un espacio entre números para indicar los valores de miles, por ejemplo 463 690.
- Utilice notación científica para expresar números con más de 3 cifras hacia la derecha o izquierda, es decir, mayores a 2,50E+05 o menores a 4,8E-03.
- Finalmente, de ser necesario y de manera opcional, se pueden incluir conclusiones, recomendaciones y agradecimiento.

REFERENCIAS

La lista de referencias debe estar en Formato APA ordenada alfabéticamente de acuerdo con el apellido del primer autor del artículo. El agregado et al no debe ir en cursiva. Por favor nótese que todas las referencias listadas aquí deben estar directamente citadas en el cuerpo del texto usando (Apellido, año). Las notas al pie deben evitarse en la medida de lo posible.

El artículo debe contener un mínimo de 6 referencias.

Seguir el formato indicado a continuación de acuerdo al tipo de referencia a:

Formato básico para referenciar libros:

Apellido, Inicial Nombre. (Año). *Título del libro*. Ciudad, País: Editorial.

• Libros con un autor:

En las referencias:

King, M. (2000). *Wrestling with the angel: A life of Janet Frame*. Auckland, New Zealand: Viking.

Cita en el texto:

(King, 2000) o King (2000) argumenta que ...

• Libros con dos autores:

En las referencias:

Treviño, L. K., y Nelson, K. A. (2007). *Managing business ethics: Straight talk about how to do it right*. Hoboken, NJ: Wiley

Cita en el texto:

(Treviño y Nelson, 2007) o Treviño y Nelson (2007) ilustran...

• Libros con dos o más autores:

En las referencias:

Krause, K.-L., Bochner, S., y Duchesne, S. (2006). *Educational psychology for learning and teaching* (2nd ed.). South Melbourne, VIC., Australia: Thomson.

Cita en el texto:

De acuerdo con Mezey et al. (2002) o ... (Mezey et al., 2002).

Formato básico para referenciar artículos científicos

Apellido, Inicial Nombre. (Año). Título del Artículo. *Título/Iniciales de la Revista*. Número de Volumen (Tomo), páginas

• Artículos en revistas:

En las referencias:

Sainaghi, R. (2008). Strategic position and performance of winter destinations. *TourismReview*, 63(4), 40-57.

Cita en el texto:

(Sainaghi, 2008) o Sainaghi (2008) sugiere ...

• Artículos con DOI

En las referencias:

Shepherd, R., Barnett, J., Cooper, H., Coyle, A., Moran-Ellis, J., Senior, V., & Walton, C. (2007). Towards an understanding of British public attitudes concerning human cloning. *Social Science & Medicine*, 65(2), 377-392. <http://dx.doi.org/10.1016/j.socscimed.2007.03.018>

Cita en el texto:

Shepherd et al. (2007) o Shepherd et al. (2007) resaltan la...

• Artículos sin DOI

En las referencias:

Harrison, B., & Papa, R. (2005). The development of an indigenous knowledge program in a New Zealand Maori-language immersion school. *Anthropology and Education Quarterly*, 36(1), 57-72. Obtenido de la base de datos AcademicResearch Library

Cita en el texto:

(Harrison y Papa, 2005) o En su investigación, Harrison y Papa (2005) establecieron...

• Artículos en línea

En las referencias:

Snell, D., & Hodgetts, D. (n.d.). The psychology of heavy metal communities and white supremacy. *Te Kura Kete Aronui, 1*. Obtenido de: <http://www.waikato.ac.nz/wfass/tkka>. (Mayo, 2015).

Cita en el texto:

(Snell y Hodgetts, n.d.) o Snell y Hodgetts (n.d.) identificaron "..."

INDEXACIONES

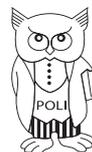


revistapolitecnica.epn.edu.ec





ESCUELA
POLITÉCNICA
NACIONAL



revistapolitecnica.epn.edu.ec
www.epn.edu.ec

150
ANIVERSARIO



ESCUELA
POLITÉCNICA
NACIONAL



EPN
editorial

revistapolitecnica.epn.edu.ec
www.epn.edu.ec